# Mengenlehre I

## Formal korrektes mathematisches Wissen

Bestandteil des Projekts

**Hilbert II**

Dokumentversion 0.20

Michael Meyling

14. März 2004

Homepage dieses Projekts: http://www.qedeq.org/index_de.html

Dieses Dokument ist in elektronischer Form an dem folgenden Ort zu finden: http://www.qedeq.org/0_01_05/mengenlehre_1.pdf

# Inhaltsverzeichnis

# Zusammenfassung

Das Projekt **Hilbert II**, beschäftigt sich mit der formalen Darstellung und Dokumentation von mathematischem Wissen. Dazu stellt **Hilbert II** eine Programmsuite zur Lösung unterschiedlicher Aufgaben bereit. Auch die konkrete Dokumentation mathematischen Grundlagenwissens mit diesen Hilfsmitteln gehört zum Ziel dieses Projekts.

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen der Mengenlehre. Ziel ist dabei die Bereitstellung von elementaren Ergebnissen der Mengenlehre, die in anderen mathematischen Disziplinen benötigt werden. Zu Beginn werden die formal logischen Regeln aufgestellt, nach denen vorgegangen wird. Nach den Grundlagen wird die Boolsche Algebra der Klassen betrachtet. Es schliessen sich Betrachtungen über Relationen und Funktionen an. Ein weiteres wichtiges Ergebnis sind die Definition der natürlichen Zahlen und die Erfüllung der Peano-Axiome durch diese, auch auf den Begriff der Rekursion wird eingegangen.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise und in formaler Form. Dazu wird ein Kalkül angegeben, der es gestattet alle wahren Formeln abzuleiten. Weitere abgeleitete Regeln, Definitionen, Abkürzungen und Syntaxerweiterungen entsprechen im Wesentlichen der mathematischen Praxis. Daher wird auch das Axiomensystem der Mengenlehre von *A. P. Morse* und *J. L. Kelley* verwendet.

Während der Fertigstellung dieses Dokuments wird mit der Korrektur und Ergänzung der formalen QEDEQ-Syntax von **Hilbert II** begonnen, um eine Übertragung dieses Texts in die formale Sprache vorzunehmen. Für weitere Information über das Projekt **Hilbert II** siehe auch unter `http://www.qedeq.org/index_de.html`.

Dieses Dokument ist noch sehr in Arbeit und wird ständig aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

# Vorwort

Das ganze Universium der Mathematik kann mit den Mitteln der Mengenlehre entfaltet werden. Außer den Axiomen der Mengenlehre werden dazu nur noch logische Axiome und Regeln benötigt. Diese elementaren Grundlagen genügen, um die komplexesten mathematischen Strukturen zu definieren und Sätze über solche Strukturen beweisen zu können. Dieses Vorgehen lässt sich vollständig formalisieren und auf die einfache Manipulation von Zeichenketten zurückführen. Die inhaltliche Deutung der Zeichenfolgen stellt dann das mathematische Universum dar.

Dabei ist es natürlich mehr als nur bequem, Abkürzungen einzuführen und weitere abgeleitete Regeln zu verwenden. Diese Bequemlichkeiten können aber jederzeit[1] eliminiert und durch die grundlegenden Begrifflichkeiten ersetzt werden.

Dieses Projekt entspringt meinem Kindheitstraum eine solche Formalisierung konkret vorzunehmen. Inzwischen sind die technischen Möglichkeiten so weit entwickelt, dass eine Realisierung möglich ist.

Dank gebührt den Professoren *W. Kerby* und *V. Günther* der Hamburger Universität für ihre inspirierenden Vorlesungen zu den Themen Logik und Axiomatische Mengenlehre. Ohne diese entscheidenden Impulse hätte es dieses Projekt nie gegeben.

Vielen Dank auch an *F. Fritsche* für zahllose Korrekturvorschläge und inhaltliche Anregungen.

Besondere Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit – wobei der Verständnisgrad unseres Säuglings vielleicht noch nicht so stark ausgeprägt ist.

Hamburg, im März 2004

Michael Meyling

[1] Zumindest ist eine solche Rückführung theoretisch immer möglich. Praktisch kann sie jedoch an der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Zeit und des nutzbaren Raums scheitern. So wird es sicherlich nicht möglich sein, die natürliche Zahl $9^{9^9}$ in Mengenschreibweise anzugeben.

# Einleitung

An den Anfang sei ein Zitat aus einem von *D. Hilbert* im September 1922 gehaltenen Vortrag[2] mit dem programmatischen Titel „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ gesetzt.

> „Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:
>
> Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ ($\rightarrow$) und für „nicht“ ( $\bar{}$ ) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist die Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas
>
> $$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$
>
> wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln $A$ und $A \rightarrow B$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel $B$ eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“

In dem 1928 erschienenen Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* formulierten *D. Hilbert* und *W. Ackermann* ein axiomatisches System der Aussagenlogik, welches die Ausgangsbasis für das hier verwendete bildet. Durch das von *P. S. Novikov* 1959 angegebene Axiomensystem und Regelwerk der Prädikatenlogik wird das System verfeinert.

Die in diesem Dokument zur Darstellung verwendete formale Sprache erfährt bereits einige Vereinfachungen[3] und ist von der DV-technischen formalen Sprache verschieden. Das dort verwendete QEDEQ-Format besitzt jedoch eine sehr grosse Affinität zur Darstellung in diesem Text. Die Überprüfung der formalen Beweise erfolgt jedoch in dem elektronisch auswertbaren QEDEQ-Format. Für weitere Information über dieses Format siehe auch unter `http://www.qedeq.org/0_01_05/projektbeschreibung.pdf`.

[2]Vortrag, gehalten in der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft. September 1922.

[3]Z. B. die Berücksichtigung von Operatorprioritäten bei der Weglassung von Klammern.

# Kapitel 1

# Logik

In diesem Kapitel wird der Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität und Funktoren vorgestellt, der die Ausgangsbasis für die Entwicklung der mathematischen Theorie darstellt. Da dieses Dokument die Mengenlehre zum Schwerpunkt hat, werden hier nur die Ergebnisse ohne weitere Beweise und in knapper Form präsentiert.

## 1.1 Logische Axiome

Die Grundlagen der bei **Hilbert II** verwendeten Logik werden hier zusammengestellt. Die folgende Kalkülsprache und ihre Axiome basieren auf den Formulierungen von *D. Hilbert*, *W. Ackermann*, *P. Bernays* und *P. S. Novikov*. Aus den hier angegebenen logischen Axiomen und den elementaren Schlussregeln können weitere Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Erst diese neuen Metaregeln führen zu einer komfortablen logischen Argumentation. Siehe auch unter `http://www.qedeq.org/logic_de.html`.

Als Symbole kommen die logischen Symbole $L = \{$ '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$', '$\rightarrow$', '$\forall$', '$\exists$' $\}$, die Prädikatenkonstanten $C = \{c_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die Funktionsvariablen[1] $F = \{f_i^k \mid i, k \in \omega \wedge k > 0\}$, die Funktionskonstanten[2] $H = \{h_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die Subjektvariablen $\mathrm{V} = \{v_i \mid i \in \omega\}$, sowie die Prädikatenvariablen $P = \{p_i^k \mid i, k \in \omega\}$ vor.[3] Unter der *Stellenzahl* eines Operators wird der obere Index verstanden. Die Menge der nullstelligen Prädikatenvariablen wird auch als Menge der Aussagenvariablen bezeichnet: $A := \{p_i^0 \mid i \in \omega\}$. Für die Subjektvariablen werden abkürzend auch bestimmte Kleinbuchstaben geschrieben. Die Kleinbuchstaben stehen für verschiedene Subjektvariablen: $v_1 =$ '$u$', $v_2 =$ '$v$', $v_3 =$ '$w$', $v_4 =$ '$x$', $v_5 =$ '$y$', $v_5 =$ '$z$'. Weiter werden als Abkürzungen verwendet: für die Prädikatenvariablen $p_1^n =$ '$\phi$' und $p_2^n =$ '$\psi$', wobei die jeweilige Stellenanzahl $n$ aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird, für die Aussagenvariablen $a_1 =$ '$A$', $a_2 =$ '$B$' und $a_3 =$ '$C$'. Als Abkürzungen für Funktionsvariablen wird festgelegt $f_1^n =$ '$f$' und $f_2^n =$ '$g$', wobei wiederum die jeweilige Stellenanzahl $n$ aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt

[1] Funktionsvariablen dienen der einfacheren Notation und werden beispielsweise zur Formulierung eines identitätslogischen Satzes benötigt: $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$. Ausserdem bereitet ihre Einführung die spätere Syntaxerweiterung zur Anwendung von funktionalen Klassen vor.

[2] Funktionskonstanten dienen ebenfalls der Bequemlichkeit und werden später für direkt definierte Klassenfunktionen verwendet. So zum Beispiel zur Potenzklassenbildung, zur Vereinigungsklassenbildung und für die Nachfolgerfunktion. All diese Funktionskonstanten können auch als Abkürzungen verstanden werden.

[3] Unter $\omega$ werden die natürlichen Zahlen, die Null eingeschlossen, verstanden. Alle bei den Mengenbildungen beteiligten Symbole werden als paarweise verschieden vorausgesetzt. Das bedeutet z. B.: $f_i^k = f_{i'}^{k'} \rightarrow (k = k' \wedge i = i')$ und $h_i^k \neq v_j$.

wird. Bei allen aussagenlogischen zweistelligen Operatoren wird der leichteren Lesbarkeit wegen die Infixschreibweise benutzt, dabei werden die Symbole '(' und ')' verwandt. D. h. für den Operator $\wedge$ mit den Argumenten $A$ und $B$ wird $(A \wedge B)$ geschrieben. Es gelten die üblichen Operatorprioritäten und die dazugehörigen Klammerregeln. Insbesondere die äußeren Klammern werden in der Regel weggelassen.

Nachfolgend werden die Operatoren mit absteigender Priorität aufgelistet.

$$\begin{gathered}\neg, \forall, \exists \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow, \leftrightarrow\end{gathered}$$

Der Begriff *Term* wird im Folgenden rekursiv definiert:

1. Jede Subjektvariable ist ein Term.
2. Seien $i, k \in \omega$ und $t_1, \ldots, t_k$ Terme. Dann ist auch $h_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ und falls $k > 0$, so auch $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Alle nullstelligen Funktionskonstanten $\{h_i^0 \mid i, \in \omega\}$ sind demzufolge Terme, sie werden auch *Individuenkonstanten* genannt.[4]

Die Begriffe *Formel*, *freie* und *gebundene* Subjektvariable werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel, solche Formeln enthalten keine freien oder gebundenen Subjektvariablen.
2. Ist $p^k$ eine $k$-stellige Prädikatenvariable und $c^k$ eine $k$-stellige Prädikatenkonstante und sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ Terme, so sind $p^k(t_1, t_2, \ldots t_k)$ und $c^k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ Formeln. Dabei gelten alle in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommenden Subjektvariablen als freie Subjektvariablen, gebundene Subjektvariablen kommen nicht vor.[5]
3. Falls die Formel $\alpha$ die freie Subjektvariable $x_1$ enthält (+++ ist das tatsächlich erforderlich, dass $x_1$ in $\alpha$ vorkommt?), dann sind auch $\forall x_1\ \alpha$ und $\exists x_1\ \alpha$ Formeln[6], und bis auf $x_1$ bleiben alle freien Subjektvariablen von $\alpha$ auch frei, und zu den gebundenen Subjektvariablen von $\alpha$ kommt $x_1$ hinzu.
4. Es seien $\alpha, \beta$ Formeln, in denen keine Subjektvariablen vorkommen, die in einer Formel gebunden und in der anderen frei sind. Dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln. Subjektvariablen, welche in $\alpha$, $\beta$ frei (bzw. gebunden) vorkommen, bleiben frei (bzw. gebunden).

Die folgenden Axiome werden an den Anfang gestellt.

**Axiom 1 (Oder-Kürzung).**

$$(A \vee A) \rightarrow A$$

**Axiom 2 (Oder-Verdünnung).**

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

[4]Analog dazu könnten Subjektvariablen auch als nullstellige Funktionsvariablen definiert werden. Da die Subjektvariablen jedoch eine hervorgehobene Rolle spielen, werden sie auch gesondert bezeichnet.

[5]Dieser zweite Punkt umfasst den ersten, welcher nur der Anschlaulichkeit wegen extra aufgeführt ist.

[6]Dabei wird $\forall$ als *Allquantor* und $\exists$ als *Existenzquantor* bezeichnet

**Axiom 3 (Oder-Vertauschung).**

$$(A \vee B) \to (B \vee A)$$

**Axiom 4 (Oder-Vorsehung).**

$$(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$$

**Axiom 5.**

$$(\forall x \ \phi(x)) \to \phi(y)$$

**Axiom 6.**

$$\phi(y) \to (\exists x \ \phi(x))$$

Die Konjunktion, die Implikation und die Äquivalenz werden als Abkürzungen definiert.[7]

**Definition 1 (Konjunktion).**

$$\alpha \wedge \beta \ :\leftrightarrow \ \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

**Definition 2 (Implikation).**

$$\alpha \to \beta \ :\leftrightarrow \ \neg\alpha \vee \beta$$

**Definition 3 (Äquivalenz).**

$$\alpha \leftrightarrow \beta \ :\leftrightarrow \ (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$$

**Regel 1 (Abtrennung, Modus Ponens).** *Wenn $\alpha$ und $\alpha \to \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch $\beta$ eine wahre Formel.*

**Regel 2 (Einsetzung für Prädikatenvariablen).** *Es sei $\alpha$ eine Formel, die die $n$-stellige Prädikatenvariable $p$ enthält und $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige Formel mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, welche nicht in $\alpha$ vorkommen.*[8] *Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $p(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in $\alpha$ durch $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.*

- *$\alpha$ ist eine im Kalkül wahre Formel*
- *die freien Variablen von $\alpha$ sind disjunkt zu den gebundenen Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ und die gebundenen Variablen von $\alpha$ disjunkt zu den freien Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$*
- *Liegt das zu ersetzende $p(t_1, \ldots, t_n)$ in $\alpha$ im Wirkungsbereich eines Quantors, so kommt die zugehörige Subjektvariable in $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ nicht vor.*[9]

**Regel 3 (Einsetzung für Funktionsvariablen).** *Es sei $\alpha$ eine Formel, die die $n$-stellige Funktionsvariable $\sigma$ enthält und $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebiger Term mit den Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$, welche nicht in $\alpha$ vorkommen.*[10] *Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in $\alpha$ durch $\tau(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.*

---

[7] Eigentlich werden die Abkürzungssymbole $\wedge, \to, \leftrightarrow$ erst an dieser Stelle definiert und erweitern die Sprachsyntax. Aus Bequemlichkeitsgründen wurden diese Symbole bereits als logische Symbole angegeben. Bei den bisher angegebenen Axiomen muss also strenggenommen die Implikation durch ihre Definition ersetzt werden.

[8] In der Formel $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ können ausser den $n$ Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ noch weitere Variablen frei vorkommen.

[9] D. h. nach dem Einsetzen werden – außer den in den für $x_1, \ldots, x_n$ eingesetzten Termen vorkommenden – keine weiteren Subjektvariablen gebunden.

[10] In dem Term $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ können ausser den $n$ Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ noch weitere Variablen vorkommen.

- *$\alpha$ ist eine im Kalkül wahre Formel*

- *die gebundenen Variablen von $\alpha$ sind disjunkt zu den Subjektvariablen von $\tau(x_1, \ldots, x_n)$*

- *Liegt das zu ersetzende $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ in $\alpha$ im Wirkungsbereich eines Quantors, so kommt die zugehörige Subjektvariable in $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ nicht vor, d. h. nach dem Einsetzen werden – außer den für $x_1$, …, $x_n$ eingesetzten – keine weiteren Subjektvariablen gebunden.*

**Regel 4 (Ersetzung für freie Subjektvariablen).** *Ausgehend von einer wahren Formel kann jede freie Subjektvariable durch einen Term ersetzt werden, der keine in der Formel bereits gebundenen Subjektvariablen enthält. Die Ersetzung muss durchgängig in der gesamten Formel erfolgen.*

**Regel 5 (Umbenennung für gebundene Subjektvariablen).** *Aus jeder im Kalkül bereits gewonnenen Formel können weitere Formeln abgeleitet werden: Jede gebundene Subjektvariable kann in eine andere, nicht bereits frei vorkommende, Subjektvariable umbenannt werden. Die Umbenennung braucht nur im Wirkungsbereich eines bestimmten Quantors zu erfolgen.*

**Regel 6 (Generalisierung).** *Wenn $\alpha \to \beta(x_1)$ eine wahre Formel ist und $\alpha$ die Subjektvariable $x_1$ nicht enthält, dann ist auch $\alpha \to (\forall x_1\ (\beta(x_1)))$ eine wahre Formel.*

**Regel 7 (Partikularisierung).** *Wenn $\alpha(x_1) \to \beta$ eine wahre Formel ist und $\beta$ die Subjektvariable $x_1$ nicht enthält, dann ist auch $(\exists x_1\ \alpha(x_1)) \to \beta$ eine wahre Formel.*

Die Auflösung und der Einsatz von Abkürzungen ist auch mit der Anwendung von Regeln verbunden. In vielen Texten zur mathematischen Logik werden diese Regeln nicht explizit formuliert, auch dieser Text geht darauf nicht weiter ein. In dem exakten QEDEQ-Format gibt es jedoch entsprechende Regeln zur Verwendung von Abkürzungen.

## 1.2 Elementare aussagenlogische Sätze

Aus den logischen Axiomen und Regeln von Abschnitt 1.1 lassen sich wichtige elementare Sätze ableiten.

**Definition 4.** *Die Prädikatskonstanten $\top$ für* true *oder* wahr *und $\perp$ für* false *oder* falsch *werden wie folgt definiert:*

$$\top \quad :\leftrightarrow \quad A \lor \neg A \tag{1.1}$$

$$\perp \quad :\leftrightarrow \quad \neg\top \tag{1.2}$$

Die folgenden Formeln lassen sich beweisen.

**Satz 1.2.1.**

$$\top \tag{1.3}$$
$$\neg\bot \tag{1.4}$$
$$A \rightarrow A \tag{1.5}$$
$$A \leftrightarrow A \tag{1.6}$$
$$A \vee B \leftrightarrow B \vee A \tag{1.7}$$
$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \tag{1.8}$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A) \tag{1.9}$$
$$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C \tag{1.10}$$
$$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \tag{1.11}$$
$$A \leftrightarrow A \vee A \tag{1.12}$$
$$A \leftrightarrow A \wedge A \tag{1.13}$$
$$A \leftrightarrow \neg\neg A \tag{1.14}$$
$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \tag{1.15}$$
$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \tag{1.16}$$
$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \tag{1.17}$$
$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \tag{1.18}$$
$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{1.19}$$
$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{1.20}$$
$$A \wedge \top \leftrightarrow A \tag{1.21}$$
$$A \wedge \bot \leftrightarrow \bot \tag{1.22}$$
$$A \vee \top \leftrightarrow \top \tag{1.23}$$
$$A \vee \bot \leftrightarrow A \tag{1.24}$$
$$A \vee \neg A \leftrightarrow \top \tag{1.25}$$
$$A \wedge \neg A \leftrightarrow \bot \tag{1.26}$$
$$(\top \rightarrow A) \leftrightarrow A \tag{1.27}$$
$$(\bot \rightarrow A) \leftrightarrow \top \tag{1.28}$$

## 1.3 Elementare Sätze der Prädikatenlogik

Aus den logischen Axiomen und Regeln von Abschnitt 1.1 lassen sich auch für die Prädikatenlogik elementare Sätze ableiten.

**Satz 1.3.1.**

$$\forall x\ (\phi(x) \to \psi(x)) \quad \to \quad \forall x\ (\psi(x)) \to \forall x\ (\psi(x)) \tag{1.29}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \to \psi(x)) \quad \to \quad \exists x\ (\psi(x)) \to \exists x\ (\psi(x)) \tag{1.30}$$
$$\exists x\ (\phi(x) \land \psi(x)) \quad \to \quad \exists x\ (\psi(x)) \land \exists x\ (\psi(x)) \tag{1.31}$$
$$\forall x\ (\psi(x)) \lor \forall x\ (\psi(x)) \quad \to \quad \forall x\ (\phi(x) \lor \psi(x)) \tag{1.32}$$
$$\exists x\ (\phi(x) \lor \psi(x))) \quad \leftrightarrow \quad \exists x\ (\psi(x)) \lor \exists x\ (\psi(x)) \tag{1.33}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \land \psi(x))) \quad \leftrightarrow \quad \forall x\ (\psi(x)) \land \forall x\ (\psi(x)) \tag{1.34}$$
$$\forall x\ \forall y\ (\phi(x,y)) \quad \leftrightarrow \quad \forall y\ \forall x\ (\phi(x,y)) \tag{1.35}$$
$$\exists x\ \exists y\ (\phi(x,y)) \quad \leftrightarrow \quad \exists y\ \exists x\ (\phi(x,y)) \tag{1.36}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \to A) \quad \leftrightarrow \quad (\forall x\ (\psi(x)) \to A) \tag{1.37}$$
$$\forall x\ (A \to \phi(x)) \quad \leftrightarrow \quad (A \to \forall x\ (\psi(x))) \tag{1.38}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \land A) \quad \leftrightarrow \quad \forall x\ (\psi(x)) \land A \tag{1.39}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \lor A) \quad \leftrightarrow \quad (\forall x\ (\psi(x)) \lor A) \tag{1.40}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow A) \quad \leftrightarrow \quad (\forall x\ (\psi(x)) \leftrightarrow A) \tag{1.41}$$

*+++ ergänzen*

## 1.4 Abgeleitete Regeln

Aus den logischen Grundlagen lassen sich logische Sätze und Metaregeln ableiten, die eine bequemere Argumentation ermöglichen. Erst mit diesem Regelwerk und zusätzlichen Definitionen und Abkürzungen wird die restliche Mathematik entwickelt. Dabei wird stets nur eine *konservative* Erweiterung der bisherigen Syntax vorgenommen. D. h. in dem erweiterten System lassen sich keine Formeln ableiten, die in der alten Syntax formuliert sind, aber dort nicht ableitbar sind. Im Folgenden werden solche Erweiterungen vorgestellt.

**Regel 8 (Ersetzung durch logisch äquivalente Formeln).** *Sei die Aussage $\alpha \leftrightarrow \beta$ bereits bewiesen. Wird dann aus der Formel $\delta$ eine neue Formel $\gamma$ dadurch gewonnen, dass ein beliebiges Vorkommen von $\alpha$ durch $\beta$ ersetzt*[11] *wird und besitzt $\gamma$ zumindest die freien Variablen (+++ unklar!) von $\delta$, dann gilt $\delta \leftrightarrow \gamma$.*

**Regel 9 (Allgemeine Assoziativität).** *Falls ein zweistelliger Operator das Assoziativitätsgesetz erfüllt, so erfüllt er auch das allgemeine Assoziativitätsgesetz. Dem Operator kann dann eine beliebige Stellenanzahl größer eins zugeschrieben werden. So wird beispielsweise anstelle für $(a+b)+(c+d)$ einfach $a+b+c+d$ geschrieben.*[12]

**Regel 10 (Allgemeine Kommutativität).** *Falls ein Operator das allgemeine Assoziativitätsgesetz erfüllt und kommutativ ist, so sind alle Permutationen von Parameterreihenfolgen einander gleich oder äquivalent.*[13] *So gilt beispielsweise $a+b+c+d = c+a+d+b$.*

**Definition 5 (Ableitbarkeit).** *Eine Formel $\beta$ heißt* aus der Formel $\alpha$ ableitbar*, wenn sich $\beta$ mit Hilfe aller Regeln des Prädikatenkalküls und der um $\alpha$ vermehrten Gesamtheit aller wahren Formeln des Prädikatenkalküls herleitbar und $\alpha \to \beta$ eine Formel ist. Dabei dürfen die beiden Quantifizierungsregeln, die Einsetzungsregel für Prädikatenvariable und die Umbenennungsregel für freie*

[11] Bei dieser Ersetzung kann es erforderlich sein, dass gebundene Variablen von $\beta$ umbenannt werden müssen, damit sich wieder eine Formel ergibt.

[12] Der $n$-stellig Operator wird mit einer bestimmten Klammerung definiert, jede andere Klammerreihenfolge liefert jedoch dasselbe Ergebnis.

[13] Je nachdem ob es sich um einen Termoperator oder einen Formeloperator handelt.

*Subjektvariable nur auf solche Variablen angewendet werden, die in der Formel $\alpha$ nicht auftreten.*

*Schreibweise:* $\alpha \vdash \beta$.

Die Ableitbarkeit einer Formel $\beta$ aus der Formeln $\alpha$ ist streng zu unterscheiden von der Ableitbarkeit einer wahren Formel aus den Axiomen des Kalküls, denn im zweiten Fall stehen mehr Ableitungsregeln zur Verfügung. Falls beispielsweise die Formel $A$ als Axiom aufgenommen wird, so ist die Formel $A \to B$ herleitbar. Hingegen läßt sich aus $A$ nicht $B$ ableiten.

**Regel 11 (Deduktionstheorem).** *Wenn eine Formel $\beta$ aus einer Formel $\alpha$ ableitbar ist, so ist die Formel $\alpha \to \beta$ im Prädikatenkalkül herleitbar.*

## 1.5 Identität

Es wird eine zweistellige Funktionskonstante festgelegt, welche in der Interpretation die Identität von Subjekten ausdrücken soll.

**Definition 6 (Gleichheit).**

$$x = y \ \ :\leftrightarrow \ \ c^2_1(x, y)$$

Dazu werden zwei weitere Axiome, auch *Gleichheitsaxiome* genannt, formuliert.

**Axiom 7 (Reflexivität der Gleichheit).**

$$x = x$$

**Axiom 8 (Leibnizsche Ersetzbarkeit).**

$$x = y \to (\phi(x) \to \phi(y))$$

**Satz 1.5.1 (Symmetrie der Gleichheit).**

$$x = y \leftrightarrow y = x \tag{1.42}$$

**Satz 1.5.2 (Transitivität der Gleichheit).**

$$x = y \ \land \ y = z \to x = z \tag{1.43}$$

**Satz 1.5.3.**

$$x = y \to (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y)) \tag{1.44}$$

**Satz 1.5.4.**

$$x = y \to f(x) = f(y) \tag{1.45}$$

## 1.6 Eingeschränkte Quantoren

Bei der folgenden Definition muss die für $\psi(x)$ eingesetzte Formel „erkennen lassen“, über welche Subjektvariable quantifiziert wird. Das ist in der Regel darüber zu entscheiden, welche freie Subjektvariable als erstes in der Formel vorkommt.[14] In der exakten Syntax des QEDEQ-Formats[15] ist die Subjektvariable immer angegeben.

[14] Beispielsweise ist in der folgenden Formel erkennbar, dass die zweite Quantifikation über die Subjektvariable $m$ läuft: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in n\ m < n$.

[15] Siehe unter `http://www.qedeq.org/0_01_05/projektbeschreibung.pdf`.

**Definition 7 (Eingeschränkter Allquantor).**

$$\forall\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \ :\leftrightarrow\ \ \forall\ x\ (\psi(x) \rightarrow \phi(x))$$

Dazu passt die folgende Definition für den eingeschränkten Existenzquantor.[16]

**Definition 8 (Eingeschränkter Existenzquantor).**

$$\exists\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \ :\leftrightarrow\ \ \exists\ x\ (\psi(x) \land \phi(x))$$

Für die Existenz genau eines Individuums mit einer bestimmten Eigenschaft wird nun ein gesonderter Quantor eingeführt.

**Definition 9 (Eingeschränkter Existenzquantor für genau ein Individuum).**

$$\exists!\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \ :\leftrightarrow\ \ \exists\ \psi(x)\ (\phi(x) \land \forall\ \psi(y)\ (\phi(y) \rightarrow x = y))$$

Durch die Gültigkeit von $\exists!\ \psi(x)(\phi(x))$ kann daher eine Subjektkonstante definiert werden, wenn $\phi(x)$ und $\psi(x)$ durch Ausdrücke ersetzt werden, die ausser $x$ keine freien Variablen, keine Prädikatsvariablen und keine Funktionsvariablen mehr enthält.

**Regel 12 (Termdefinition durch Formel).** *Falls die Formel $\exists!x\ (\alpha(x))$ gilt, dann kann die Termsyntax durch $D(x, \alpha(x))$ mit erweitert werden. Ist $\beta(D(x, \alpha(x)))$ eine mit diesem Term gebildete Formel, so wird diese Formel definiert durch $\beta(y) \land \exists!x\ (\alpha(x) \land x = y)$ mit einer noch nicht in $\alpha$ vorkommenden Subjektvariablen $y$. Auch in der abkürzenden Schreibweise gilt die Subjektvariable $x$ als gebunden, die Subjektvariable $y$ ist frei wählbar und wird in der Abkürzung nicht weiter beachtet. Veränderungen von $\alpha$ durch in eine andere Formel $alpha'$ müssen jedoch auch in der Abkürzung durchgeführt werden. Alle Bildungsregeln werden entsprechend erweitert.*

Für eingeschränkte Quantoren gelten analog zu 1.3.1 entsprechende Formeln.
+++

[16]Passend, da $\neg\forall\ \psi(x)\ (\phi(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ \neg(\psi(x) \rightarrow \phi(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\psi(x) \land \neg\phi(x)) \leftrightarrow \exists\ \psi(x)\ (\neg\phi(x))$.

# Kapitel 2

# Grundlagen

Nach der Entwicklung der *naiven Mengenlehre* (1895 - 1897) durch *G. Cantor* und der Entdeckung von Widersprüchen durch *B. Russell* (1902) gab es verschiedene Versuche die Mengenlehre zu axiomatisieren. Zum einen in der *Typentheorie*[1] (1910) von *A. N. Whitehead* und *B. Russell* in ihrem epochalen Werk „Principia Mathematica". Zum anderen in der Zermeloschen axiomatischen Mengenlehre (1908) mit der Fraenkischen Verbesserung[2] (1921) und der skolemschen Präzisierung der mengentheoretischen Aussagen[3] (1922). Diese sogenannte Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (*ZF*) erfuhr durch *K. Gödel* und *P. Bernays* eine Verbesserung, die häufig mit *ZFG* abgekürzt wird. Die Verwendung dieser für mengentheoretische Grundlagenforschung immer noch benutzten Theorie ist jedoch für die mathematische Praxis unbequem. Auch die Ergänzungen von *J. v. Neumann* und *P. Bernays* führten zu einer neuen Formulierung, welche mit *NBG* bezeichnet wird. Eine Verallgemeinerung von NBG wurde von *J. L. Kelley* (1955) vorgestellt. In der Tradition dieses auch *MK*[4] genannten Systems steht auch das hier verwendete Axiomensystem der Mengenlehre.

In der naiven Mengenlehre wird der elementare Begriff von *G. Cantor* (1897) wie folgt erklärt:
*„Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen."*

Der bekannte *Russellsche Widerspruch* lässt sich nun wie folgt konstruieren. Sei $M$ die Menge aller Mengen, die sich selbst als Element nicht enthalten: $M = \{X \mid X \notin X\}$. Nun stellt sich die Frage, ob $M \in M$ gilt. Angenommen, diese Aussage ist richtig, dann folgt $M \notin M$ aus der Eigenschaft die $M$ charakterisiert. Andererseits folgt aus $M \notin M$ sofort $M \in M$ aus demselben Grund. Also gilt $M \in M \leftrightarrow M \notin M$ und diese naive Mengenbildung führt zu einem Widerspruch.

Zur Auflösung dieses Widerspruchs muss die Mengenbildung eingeschränkt werden. Dazu wird in MK als Grundbegriff die *Klasse* gewählt. Bestimmte Klassen zeichnen sich dadurch aus, dass sie das Prädikat *ist eine Menge* erfüllen. Die Bildung neuer Klassen ist nur mit Mengen erlaubt: jedes Element einer Klasse muss eine Menge sein. Durch diese Einschränkung werden alle bekannten Widersprüche vermieden. Die grundlegendsten Axiome und Definitionen der Mengenlehre werden in diesem Kapitel vorgestellt.

[1] In der Typentheorie können nur Mengen einer bestimmten Stufe zu Mengen der nächsthöheren Stufe zusammengefaßt werden.
[2] Verwendung unendlich vieler Axiome, Aussonderungsschema.
[3] Das Aussonderungsschema wird durch das Ersetzungsaxiomschema ersetzt.
[4] Diese Abkürzung ist nach *A. P. Morse* und *J. L. Kelley* benannt, das Axiomensystem wurde jedoch zuvor auch von anderen Mathematikern vorgestellt.

## 2.1 Komprehension und Extensionalität

Die Interpretationen der Subjektvariablen heißen *Klassen*.

Als neue zweistellige Funktionskonstante wird die Elementbeziehung $\in$ vorausgesetzt.

**Definition 10 (Elementbeziehung).**

$$x \in y \ :\leftrightarrow \ c_2^2(x, y)$$

**Definition 11 (Negation der Elementbeziehung).**

$$x \notin y \ :\leftrightarrow \ \neg(x \in y)$$

Ist eine Klasse Element einer anderen Klasse, dann wird sie auch als *Menge* bezeichnet.

**Definition 12 (Mengendefinition).**

$$\mathfrak{M}(x) \ :\leftrightarrow \ \exists y \ (x \in y)$$

Zur Klassenbildung wird das Komprehensionsaxiom benötigt.

**Axiom 9 (Komprehensionssaxiom).**

$$\exists x \ \forall y \ (y \in x \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))$$

Werden an $\phi(y)$ zusätzliche Anforderungen gestellt, so bilden die hier aufgelisteten Axiome ein NBG-System.[5] In den herkömmlichen Formulierungen dieses Axioms wird als zusätzliche Einschränkung an $\phi(y)$ gefordert, dass in dieser Formel die Subjektvariable $x$ nicht vorkommen darf. Diese Forderung ist aufgrund des Verbots der mehrfachen Quantifizierung mit derselben Subjektvariablen und der Regel 2 erfüllt.

Der Gleichheitsbegriff wird durch das Extentsionalitätsaxiom festgeschrieben.[6] Die Gleichheit zweier Klassen soll dann gegeben sein, wenn sie dieselben Elemente besitzen.

**Axiom 10 (Extensionalitätsaxiom).**

$$\forall x \ \forall y \ (\forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y$$

Aus der Leibnizschen Ersetzbarkeit 8 folgt auch die umgekehrte Richtung, so dass Folgendes gilt.

**Satz 2.1.1 (Extensionalität).**

$$x = y \leftrightarrow \forall x \ \forall y \ (\forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \tag{2.1}$$

[5] Dazu darf in $\phi(y)$ nur über Mengen quantifiziert werden, d. h. alle in $\phi(y)$ vorkommenden Quantoren haben die Form $\forall \mathfrak{M}(z) \ (\psi(z)))$ oder $\exists \mathfrak{M}(z) \ (\psi(z))$ mit entsprechenden $z$ und $\psi(z)$. Falls $\phi(y)$ diese Anforderung erfüllt, wird auch von einer *prädikativen* Formel gesprochen.

[6] Die Umfangsgleichheit kann auch als Definition des Gleichheitsprädikates verwendet werden. Das ist jedoch zum Nachweis der Leibnizschen Ersetzbarkeit nicht ausreichend. Dafür muss die Extensionalität durch das folgende Axiom gesichert werden ($x = y \wedge x \in z \rightarrow y \in z$. Damit genügt dann das definierte Gleichheitsprädikat allen Anforderungen an den in Abschnitt 1.5 vorgestellten Identitätsbegriff. Aus Gründen der formalen Vereinfachung wird hier jedoch von einem Prädikatenkalkül mit Identität ausgegangen.

Durch die Extensionalität und das Komprehensionsaxiom wird nun der Zusammenhang zwischen einer Aussage $\phi(y)$ und der durch diese Aussage definierten Klasse festgelegt. Das Komprehensionsaxiom behauptet die Existenz mindestens einer durch die Aussage $\mathfrak{M}(y) \;\wedge\; \phi(y)$ definierten Klasse. Das Extensionalitätsaxiom und die Gleichheitsaxiome sichern ab, dass es höchstens eine solche Klasse gibt: irgend zwei Klassen, welche dieselben Elemente besitzen, sind gleich im Sinne der Ersetzbarkeit in allen einschlägigen Aussagen. Mit anderen Worten: es gibt nur genau eine solche Klasse.

**Satz 2.1.2.**

$$\exists! x \; \forall y \; (y \in x \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \tag{2.2}$$

Deshalb können wir eine neue abkürzende Schreibweise einführen. Siehe auch Regel 12.

**Regel 13 (Klassenschreibweise).** *Der Ausdruck $\{x \mid \phi(x)\}$ bezeichnet einen Term, alle Bildungsregeln werden entsprechend erweitert. Ist $\alpha(\{x \mid \phi(x)\})$ eine mit diesem Term gebildete Formel, so wird diese Formel definiert durch $\alpha(y) \wedge \forall x \; (x \in y \leftrightarrow \mathfrak{M}(x) \wedge \phi(x))$ mit einer noch nicht in $\alpha$ vorkommenden Subjektvariablen $y$.*[7] *Auch in der abkürzenden Schreibweise gilt die Subjektvariable $x$ als gebunden, die Subjektvariable $y$ ist frei wählbar und wird in der Abkürzung nicht weiter beachtet. Bei der Ersetzung von $\phi$ durch eine andere Formel muss auch in $\{x \mid \phi(x)\}$ ersetzt werden.*

Im Folgenden kann diese abkürzende Schreibweise in prädikativen Aussagen benutzt werden.

**Satz 2.1.3.** *Die Gültigkeit der Ausgangsprädikate drückt sich für diesen neuen Term wie folgt aus:*

$$\begin{aligned}
y \in \{x \mid \phi(x)\} \quad &:\leftrightarrow \quad \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y) && (2.3)\\
y = \{x \mid \phi(x)\} \quad &:\leftrightarrow \quad \forall z \; (z \in y \leftrightarrow z \in \{x \mid \phi(x)\}) && (2.4)\\
\{x \mid \phi(x)\} = \{x \mid \psi(x)\} \quad &:\leftrightarrow \quad \forall z \; (z \in \{x \mid \phi(x)\} && (2.5)\\
&\qquad \leftrightarrow z \in \{x \mid \psi(x)\}) && (2.6)\\
\{x \mid \phi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} \quad &:\leftrightarrow \quad \forall u \; \forall v \; (u = \{x \mid \phi(x)\} \\
&\qquad \wedge\; v = \{x \mid \psi(x)\} \rightarrow u \in v && (2.7)\\
\{x \mid \phi(x)\} \in y \quad &:\leftrightarrow \quad \forall u \; (u = \{x \mid \phi(x)\}) \rightarrow u \in y && (2.8)
\end{aligned}$$

**Satz 2.1.4.**

$$x \in \{y \mid \phi(y)\} \;\leftrightarrow\; \phi(x) \tag{2.9}$$

**Satz 2.1.5.**

$$\exists! x \; (x = \{y \mid \phi(y)\}) \tag{2.10}$$

**Satz 2.1.6.**

$$(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \;\rightarrow\; (\{y \mid \phi(y)\} = \{y \mid \psi(y)\}) \tag{2.11}$$

Jede Klasse lässt sich durch eine Aussage beschreiben, indem auf ihre Elemente bezug genommen wird.

**Satz 2.1.7.**

$$\forall x \; (x = \{y \mid y \in x\}) \tag{2.12}$$

[7] Auch die Schreibweise $\exists! y \; (\alpha(y) \wedge \forall x \; (x \in y \leftrightarrow \mathfrak{M}(x) \wedge \phi(x)))$ ist möglich.

## 2.2 Spezielle Klassen

Die Russellsche Klasse kann nun einfach definiert werden.

**Definition 13 (Russellsche Klasse).**

$$\mathfrak{Ru} \ := \ \{x \mid x \notin x\}$$

Die Russellsche Klasse ist eine *echte* Klasse, d. h. sie ist keine Menge.

**Satz 2.2.1.**

$$\neg\, \mathfrak{M}(\mathfrak{Ru}) \tag{2.13}$$

Die Allklasse soll alles mögliche umfassen.

**Definition 14 (Allklasse).**

$$\mathfrak{V} \ := \ \{x \mid x = x\}$$

Die Allklasse umfasst alle Mengen.

**Satz 2.2.2.**

$$\mathfrak{V} = \{x \mid \mathfrak{M}(x)\} \tag{2.14}$$

Eine Umformulierung dazu ist der folgende Satz.

**Satz 2.2.3.**

$$x \in \mathfrak{V} \leftrightarrow \mathfrak{M}(x) \tag{2.15}$$

Entsprechend definieren wir die leere Klasse. Später werden wir feststellen, dass die leere Klasse eine Menge ist. Dazu benötigen wir jedoch weitere Mengenaxiome. Wir bezeichnen diese Klasse jedoch schon jetzt mit den Worten *leere Menge*.

**Definition 15 (Nullmenge).**

$$\emptyset \ := \ \{x \mid x \neq x\}$$

**Satz 2.2.4.**

$$\forall z \ z \notin \emptyset \tag{2.16}$$

**Satz 2.2.5.**

$$\forall z \ (z \notin x) \leftrightarrow x = \emptyset \tag{2.17}$$

# Kapitel 3

# Boolesche Algebra der Klassen

Die elementaren Operationen von Klassen und ihre Eigenschaften werden nun beschrieben.

Eine Boolesche Algebra, oft auch Boolescher Verband genannt, ist eine spezielle algebraische Struktur, die die Eigenschaften der logischen Operatoren *und*, *oder*, *nicht* sowie die Eigenschaften der mengentheoretischen Verknüpfungen *Durchschnitt*, *Vereinigung* und *Komplement* abstrahiert.

Sie ist benannt nach *G. Boole*, der sie in der Mitte des 19. Jahrhunderts definierte, um algebraische Methoden in der Aussagenlogik anwenden zu können.

## 3.1 Klassenoperatoren

Die Schreibweise bzw. Regel 13 ermöglicht die Definition von Klassenperatoren mithilfe der logischen Verknüpfungen.

Die Vereinigung zweier Klassen besteht aus den Elementen beider Klassen.

**Definition 16 (Vereinigung).**

$$x \cup y \ := \ \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$$

Entsprechend wird der Durchschnitt zweier Klassen definiert, als Klasse die aus den Elementen besteht, die in beiden Klassen vorhanden sind.

**Definition 17 (Durchschnitt).**

$$x \cap y \ := \ \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$$

Auch das Komplement einer Klasse kann einfach definiert werden.

**Definition 18 (Komplement).**

$$\overline{x} \ := \ \{z \mid z \notin x\}$$

Das relative Komplement einer Klasse wird analog definiert.

**Definition 19 (relatives Komplement).**

$$x \setminus y \ := \ x \cap \overline{y}$$

Ob eine Menge ein Element der Vereinigung zweier Klassen ist, kann natürlich auch direkt angegeben werden.

**Satz 3.1.1.**

$$z \in (x \cup y) \leftrightarrow z \in x \vee z \in y \tag{3.1}$$

Entsprechendes gilt für den Durchschnitt zweier Klassen.

**Satz 3.1.2.**

$$z \in (x \cap y) \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y \tag{3.2}$$

Analoges gilt für das Komplement, dort muss jedoch die Mengeneigenschaft explizit abgeprüft werden.

**Satz 3.1.3.**

$$z \in \overline{x} \leftrightarrow \mathfrak{M}(z) \wedge z \notin x \tag{3.3}$$

Für das relative Komplement gilt das Folgende.

**Satz 3.1.4.**

$$z \in (x \setminus y) \leftrightarrow z \in x \wedge z \notin x \tag{3.4}$$

Die vorherigen Sätze zeigen die Übertragbarkeit der Eigenschaften der logischen Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ auf die Klassenverknüpfungen $\cup$, $\cap$ und $^-$. Deshalb lassen sich die entsprechenden logischen Gesetzmässigkeiten direkt auf die Klassenverknüpfungen übertragen.

**Satz 3.1.5.**

$$\begin{aligned}
x \cup y &= y \cup x && (3.5)\\
x \cap y &= y \cap x && (3.6)\\
(x \cup y) \cup z &= x \cup (y \cup z) && (3.7)\\
(x \cap y) \cap z &= x \cap (y \cap z) && (3.8)\\
x &= x \cup x && (3.9)\\
x &= x \cap x && (3.10)\\
\overline{\overline{x}} &= x && (3.11)\\
\overline{(x \cup y)} &= \overline{x} \cap \overline{y} && (3.12)\\
\overline{(x \cap y)} &= \overline{x} \cup \overline{y} && (3.13)\\
x \cup (y \cap z) &= (x \cup y) \cap (x \cup z) && (3.14)\\
x \cap (y \cup z) &= (x \cap y) \cup (x \cap z) && (3.15)\\
\overline{\emptyset} = \mathfrak{V} & && (3.16)\\
\overline{\mathfrak{V}} = \emptyset & && (3.17)\\
x \cap \mathfrak{V} &= x && (3.18)\\
x \cap \emptyset &= \emptyset && (3.19)\\
x \cup \mathfrak{V} &= \mathfrak{V} && (3.20)\\
x \cup \emptyset &= x && (3.21)\\
x \cup \overline{x} &= \mathfrak{V} && (3.22)\\
x \cap \overline{x} &= \emptyset && (3.23)
\end{aligned}$$

## 3.2 Ordnung

Wir definieren die Teilklassenrelation wie üblich.

**Definition 20 (Unterklasse).**

$$x \subset y \;:\leftrightarrow\; \forall z\ (z \in x \to z \in y)$$

Diese Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, definiert also eine teilweise (partielle) Ordnung mit $\emptyset$ als kleinstem und $\mathfrak{V}$ als größtem Element.

**Satz 3.2.1.**

$$x \subset x \tag{3.24}$$
$$x \subset y \land y \subset z \to x \subset z \tag{3.25}$$
$$x \subset y \land y \subset x \to x = y \tag{3.26}$$
$$\emptyset \subset x \tag{3.27}$$
$$x \subset \mathfrak{V} \tag{3.28}$$
$$x \subset \emptyset \to x = 0 \tag{3.29}$$
$$\mathfrak{V} \subset x \to x = \mathfrak{V} \tag{3.30}$$

**Satz 3.2.2.**

$$x \cap y \subset x \tag{3.31}$$
$$x \cap y \subset y \tag{3.32}$$

**Satz 3.2.3.**

$$x \subset x \cup y \tag{3.33}$$
$$y \subset x \cup y \tag{3.34}$$

**Satz 3.2.4.**

$$x \subset z \land y \subset z \leftrightarrow x \cup y \subset z \tag{3.35}$$
$$z \subset x \land z \subset y \leftrightarrow z \subset x \cap y \tag{3.36}$$

**Satz 3.2.5.**

$$x \subset y \to x \cup z \subset y \cup z \tag{3.37}$$
$$x \subset y \to x \cap z \subset y \cap z \tag{3.38}$$

**Satz 3.2.6.**

$$x \subset y \leftrightarrow \overline{y} \subset \overline{x} \tag{3.39}$$

**Satz 3.2.7.**

$$x \subset y \leftrightarrow x \cap \overline{y} = \emptyset \tag{3.40}$$
$$x \subset y \leftrightarrow \overline{x} \cup y = \mathfrak{V} \tag{3.41}$$
$$x \subset \overline{y} \leftrightarrow x \cap y = \emptyset \tag{3.42}$$
$$x \cap y \subset z \leftrightarrow x \subset \overline{y} \cup z \tag{3.43}$$

Aus der Teilklassenrelation lässt sich ein weiterer Klassenoperator gewinnen, die *Potenzklassenbildung*.

**Definition 21 (Potenzklasse).**

$$\mathfrak{P}(x) \;:=\; \{z \mid z \subset x\}$$

Für diesen neuen Operator gelten die folgenden Aussagen.

**Satz 3.2.8.**

$$\begin{aligned}
z \in \mathfrak{P}(x) &\leftrightarrow \mathfrak{M}(x) \wedge z \subset x && (3.44)\\
\mathfrak{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} && (3.45)\\
\mathfrak{P}(\mathfrak{V}) &= \mathfrak{V} && (3.46)\\
\mathfrak{M}(x) &\leftrightarrow x \in \mathfrak{P}(x) && (3.47)\\
x \subset y &\rightarrow \mathfrak{P}(x) \subset \mathfrak{P}(y) && (3.48)\\
\mathfrak{M}(x) \wedge \mathfrak{P}(x) \subset \mathfrak{P}(y) &\rightarrow x \subset y && (3.49)\\
\mathfrak{P}(x \cap y) &= \mathfrak{P}(x) \cap \mathfrak{P}(y) && (3.50)\\
\mathfrak{P}(x) \cup \mathfrak{P}(y) &\subset \mathfrak{P}(x \cup y) && (3.51)
\end{aligned}$$

## 3.3 Boolsche Algebra

Die Klassen bilden mit den Operatoren $\cap$, $\cup$, $^{-}$ und den Konstanten $\emptyset$, $\mathfrak{V}$ eine boolesche Algebra.

+++ Kommutativität, Assoziativität, Distributivität Idempotenz.

## 3.4 Unendliche boolsche Operatoren

Es können auch beliebige Schnittklassen und Vereinigungsklassen gebildet werden. Dazu muss nur festgelegt werden, über welche Klassen jeweils geschnitten bzw. vereinigt wird. Das kann im allgemeinsten Fall durch die Angabe einer Eigenschaft $\phi$ geschehen. Alle Klassen, die diese Eigenschaft besitzen, werden dann zur Klassenbildung herangezogen.

**Definition 22 (Allgemeiner Durchschnitt).**

$$\bigcap_{\phi(x)} x \;:=\; \{y \mid \forall \phi(x)\ (y \in x)\}$$

**Definition 23 (Allgemeine Vereinigung).**

$$\bigcup_{\phi(x)} x \;:=\; \{y \mid \exists \phi(x)\ (y \in x)\}$$

In Analogie zu Satz 2.1.4 gilt nun:

**Satz 3.4.1.**

$$y \in \bigcap_{\phi(x)} x \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \forall \phi(x)\ (y \in x) \tag{3.52}$$

$$y \in \bigcup_{\phi(x)} x \leftrightarrow \exists \phi(x)\ (y \in x) \tag{3.53}$$

Die Einschränkung auf Mengen in (3.52) ist notwendig, da sonst bei einem nicht erfüllbaren $\phi$ auch alle Klassen $y$, die keine Mengen sind, die rechte Seite der Äquivalenz erfüllen würden.

**Satz 3.4.2.**

$$\phi(x) \rightarrow x \subset \bigcup_{\phi(y)} y \tag{3.54}$$

**Satz 3.4.3.**

$$\forall \phi(x)\ (x \subset z) \leftrightarrow \bigcup_{\phi(y)} y \subset z \tag{3.55}$$

**Satz 3.4.4.**

$$\forall \phi(x)\ (\bigcap_{\phi(y)} y \subset x) \tag{3.56}$$

**Satz 3.4.5.**

$$\forall \phi(x)\ (z \subset x) \leftrightarrow z \subset \bigcap_{\phi(y)} y \tag{3.57}$$

**Satz 3.4.6.**

$$x \cup y = \bigcup_{z=x\ \vee\ z=y} z \tag{3.58}$$

$$x \cap y = \bigcap_{z=x\ \wedge\ z=y} z \tag{3.59}$$

**Satz 3.4.7.**

$$x = \bigcup_{z=x} z \tag{3.60}$$

$$x = \bigcap_{z=x} z \tag{3.61}$$

**Satz 3.4.8.**

$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x) \quad \rightarrow \quad \bigcup_{\phi(x)} x = \bigcup_{\psi(x)} x \tag{3.62}$$

$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x) \quad \rightarrow \quad \bigcap_{\phi(x)} x = \bigcap_{\psi(x)} x \tag{3.63}$$

**Satz 3.4.9.**

$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow x = z) \quad \rightarrow \quad z = \bigcap_{\phi(x)} x \tag{3.64}$$

$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow x = z) \quad \rightarrow \quad z = \bigcup_{\phi(x)} x \tag{3.65}$$

**Satz 3.4.10.**

$$\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x) \quad \rightarrow \quad \bigcup_{\phi(x)} x \subset \bigcup_{\psi(x)} x \tag{3.66}$$

$$\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x) \quad \rightarrow \quad \bigcap_{\phi(x)} x \subset \bigcap_{\psi(x)} x \tag{3.67}$$

**Satz 3.4.11.**

$$\exists \phi(x)\ (\bigcap_{\phi(x)} x) \subset \bigcup_{\phi(x)} x \tag{3.68}$$

**Satz 3.4.12.**

$$x \subset \mathfrak{P}(\bigcup_{z \in x} z) \tag{3.69}$$

$$\bigcup_{z \in \mathfrak{P}(x)} z \subset x \tag{3.70}$$

$$\forall\, \mathfrak{M}(x) \quad x = \bigcup_{z \in \mathfrak{P}(x)} z \tag{3.71}$$

+++ weitere Rechengesetze, de Morgan etc.
+++ muss eventuell in Relationen und Funktionen noch einmal für Indexmengen ergänzt werden

## 3.5 Mengen

Zur Darstellung der Booleschen Klassenalgebra wurden noch keine mengentheoretischen Axiome benötigt Im Folgenden werden weitere Axiome vorgestellt, die Bedingungen dafür angeben, wann eine Klasse eine Menge ist.

**Axiom 11 (Axiom der Potenzmenge).**

$$\forall \mathfrak{M}(x)\ \exists \mathfrak{M}(y)\ \forall z\ (z \subset x \to z \in y)$$

**Axiom 12 (Axiom der Paarmenge).**

$$\forall \mathfrak{M}(x)\ \forall \mathfrak{M}(y)\ \exists \mathfrak{M}(z)\ (x \in z \wedge y \in z)$$

**Axiom 13 (Axiom der Vereinigungsmenge).**

$$\forall \mathfrak{M}(x)\ \exists \mathfrak{M}(y)\ \forall z\ (z \in x \to z \subset y)$$

**Satz 3.5.1.**

$$\forall\, \mathfrak{M}(x) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{P}(x)) \tag{3.72}$$
$$\forall\, \mathfrak{M}(x)\ \forall\, \mathfrak{M}(y) \quad \mathfrak{M}(\{x, y\}) \tag{3.73}$$
$$\forall\, \mathfrak{M}(x) \quad \mathfrak{M}(\textstyle\bigcup_{z \subset x} z) \tag{3.74}$$
$$\forall\, \mathfrak{M}(x) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{P}(x)) \tag{3.75}$$
$$\forall\, \mathfrak{M}(x)\ \forall\, y \subset x \quad \mathfrak{M}(y) \tag{3.76}$$

**Satz 3.5.2.**

$$\neg\, \mathfrak{M}(y) \wedge y \subset x \quad \to \quad \neg\, \mathfrak{M}(x) \tag{3.77}$$
$$\mathfrak{M}(x) \quad \to \quad \mathfrak{M}(\{x\}) \tag{3.78}$$
$$\mathfrak{M}(x) \quad \to \quad \mathfrak{M}(x \cap y) \tag{3.79}$$
$$\mathfrak{M}(x) \quad \to \quad \neg\, \mathfrak{M}(\overline{x}) \tag{3.80}$$
$$x \quad = \quad \bigcup_{z \in \mathfrak{P}(x)} z \tag{3.81}$$
$$\mathfrak{M}(x) \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{M}(\bigcup_{z \subset x} z) \tag{3.82}$$
$$\mathfrak{M}(x) \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{P}(x)) \tag{3.83}$$
$$\mathfrak{M}(x \cup y) \quad \to \quad \mathfrak{M}(x) \tag{3.84}$$
$$\neg\, \mathfrak{M}(x) \wedge \mathfrak{M}(y) \quad \to \quad .\neg\, \mathfrak{M}(x \setminus y) \tag{3.85}$$

## 3.6 Fundierung und Unendlichkeit

**Axiom 14 (Regularitätsaxiom).**

$$\forall x\ (x \neq \emptyset \to \exists y\ (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

**Definition 24 (Nachfolger).**

$$\mathcal{N}(x) \ := \ \{y \mid y \in x \vee y = x\}$$

**Axiom 15 (Unendlichkeitsaxiom).**

$$\exists\, \mathfrak{M}(x)\ (\emptyset \in x \wedge \forall\ y\ (y \in x \to \mathcal{N}(y) \in x))$$

# Kapitel 4

# Relationen und Funktionen

Um Relationen definieren zu können, wird der Begriff des *geordneten Klassenpaares* benötigt, der es ermöglicht das *cartesische Produkt* von Klassen zu definieren. Relationen sind Teilklassen von cartesischen Produkten und bilden eine mit bestimmten Operationen eine *universelle Algebra*. Spezielle Relationen sind die Äquivalenzrelationen, die einen etwas weiter gefassten Gleichheitsbegriff ermöglichen. Funktionen sind ebenfalls spezielle Relationen, das Fraenkelsche Ersetzungsaxiom garantiert das Mengen auf Mengen abgebildet werden.

## 4.1 Klassenangabe durch Aufzählung

Eine Klasse kann auch durch Angabe ihrer Elemente definiert werden. Insbesondere kann durch Angabe eines Elements die sogenannte *Einerklasse* festgelegt werden.

**Definition 25 (Einerklasse).**

$$\{x\} \;:=\; \{u \mid \mathfrak{M}(x) \to u = x\}$$

Da der Ausdruck $\{x\}$ für jegliches $x$ definiert ist, kann er auch für den Fall, dass $x$ eine echte Klasse ist, gebildet werden. In diesem Fall erfüllen alle Mengen $u$ die Bedingung $\mathfrak{M}(u) \land (\mathfrak{M}(x) \to u = x)$ und die Einerklasse ist mit der Allklasse identisch. Das führt zu einem technisch einfacheren Umgang mit der Einerklasse.[1]

**Satz 4.1.1.**

$$\neg\,\mathfrak{M}(x) \to x = \mathfrak{V} \tag{4.1}$$

**Satz 4.1.2.**

$$\forall\,\mathfrak{M}(x)\;\forall\,\mathfrak{M}(y)\;\{x\} = \{y\} \leftrightarrow x = y \tag{4.2}$$

**Definition 26 (Klassenangabe durch Aufzählung).**

$$\{x, y\} \;:=\; \{x\} \cup \{y\} \tag{4.3}$$

$$\{x, y, z\} \;:=\; \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} \tag{4.4}$$

$$\tag{4.5}$$

[1] Andere Autoren wie z. B. auch K. Gödel, definieren $\{x\}$ durch $\{u \mid u = x\}$.

## 4.2 Geordnetes Klassenpaar

Die Definition eines geordneten Paares $\langle x, y\rangle$ erfolgt nach *N. Wiener* (1914) bzw. *K. Kuratowski* (1921).

**Definition 27 (Geordnetes Klassenpaar).**

$$\langle x, y\rangle \;:=\; \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

**Satz 4.2.1.**

$$\forall\,\mathfrak{M}(x)\;\forall\,\mathfrak{M}(y)\;\forall z\;\, z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \lor z = y \tag{4.6}$$

**Satz 4.2.2.**

$$(\neg\,\mathfrak{M}(x) \lor \neg\,\mathfrak{M}(y)) \to \{x, y\} = \mathfrak{V} \tag{4.7}$$

**Satz 4.2.3.**

$$\{x, y\} \;=\; \{y, x\} \tag{4.8}$$

$$\{x, x\} \;=\; \{x\} \tag{4.9}$$

## 4.3 Kartesisches Produkt

Das Kartesische Produkt[2], auch *Kreuzprodukt* genannt ist die Klasse aller geordneter Paare, deren Elemente aus diesen Klassen stammen.

**Definition 28 (Kartesisches Produkt).**

$$x \times y \;:=\; \{z \mid \exists u \in x\; \exists v \in y\; (z = \langle u, v\rangle)\}$$

+++

## 4.4 Relationen

**Definition 29 (Relation).**

$$\mathrm{Rel}(x) \;:\leftrightarrow\; \forall y \in x\; \exists\mathfrak{M}(u)\; \exists\mathfrak{M}(v)\; y = \langle u, v\rangle$$

**Definition 30 (Definitionsbereich).**

$$\mathrm{Dmn}(x) \;:=\; \{u \mid \mathfrak{M}(u) \land \exists\mathfrak{M}(v)\; \langle u, v\rangle \in x\}$$

**Definition 31 (Wertebereich).**

$$\mathrm{Rng}(x) \;:=\; \{v \mid \mathfrak{M}(v) \land \exists\mathfrak{M}(u)\; \langle u, v\rangle \in x\}$$

+++

## 4.5 Relationenalgebra

+++

[2]Kartesisch oder kartesianisch nach der lateinischen Namensform *Cartesius* des Philosophen und Mathematikers *R. Descartes*.

## 4.6 Äquivalenzrelationen

+++

## 4.7 Abbildungen und Funktionen

+++

**Definition 32 (Funktionale Klasse).**

$$\mathrm{Fkt}(x) \;:\leftrightarrow\; \mathrm{Rel}(x) \land \forall u \in \mathrm{Dmn}(x)\ \exists! v\ \langle u, v\rangle \in x$$

**Axiom 16 (Fraenkelsches Ersetzungsaxiom).**

$$\mathrm{Fkt}(x) \land \mathfrak{M}(\mathrm{Dmn}(x)) \to \mathfrak{M}(\mathrm{Rng}(x))$$

# Kapitel 5

# Natürliche Zahlen

+++

## 5.1 Definition und Grundeigenschaften

+++

## 5.2 Induktion

+++

## 5.3 Folgen und normale Funktionen

+++

## 5.4 Rekursion

+++

# Kapitel 6

# Auswahlaxiom

+++

**Axiom 17 (Auswahlaxiom für Relationen).**

$$\mathrm{Rel}(x) \to \exists\,\mathrm{Fkt}(y)\ y \subset x \land \mathrm{Dmn}(x) = \mathrm{Dmn}(y)$$

## 6.1 Wohlordnungen

+++

## 6.2 Anwendungen des Auswahlaxioms

# Kapitel 7

# Kontinuum

+++

# Kapitel 8

# GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002



## PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section "COPYING IN QUANTITY".

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections "VERBATIM COPYING" and "COPYING IN QUANTITY" above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

1. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
2. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
3. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
4. Preserve all the copyright notices of the Document.
5. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
6. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
7. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

8. Include an unaltered copy of this License.
9. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
10. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
11. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
12. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
13. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
14. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
15. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section "MODIFICATIONS" above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

## COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section "COPYING IN QUANTITY" is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section "MODIFICATIONS". Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section "MODIFICATIONS") to Preserve its Title (section "APPLICABILITY AND DEFINITIONS") will typically require changing the actual title.

## TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

## FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `http://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

## ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © *year* *your name*.
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being *list their titles*, with the Front-Cover Texts being *list*, and with the Back-Cover Texts being *list*.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

# Literaturverzeichnis


[1] *A.N. Whitehead, B. Russell*, Principia Mathematica, Cambridge University Press, London 1910

[2] *P. Bernays*, Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“, Math. Zeitschr. 25 (1926), 305-320

[3] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, Berlin 1928

[4] *P.S. Novikov*, Grundzüge der mathematischen Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973

[5] *J. D. Monk*, Introduction to Set Theory, McGraw-Hill, New York 1969

[6] *J. Schmidt*, Mengenlehre I, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966

[7] *U. Friedrichsdorf, A. Prestel*, Mengenlehre für den Mathematiker, Vieweg, Braunschweig 1985

[8] *G. Takenti, W. M. Zaring*, Introduction to Axiomatic Set Theory, McGraw-Hill, New York 1971

[9] *W. Kerby*, Vorlesung „Axiomatische Mengenlehre“, gehalten an der Universität Hamburg, Sommersemester 1992

[10] *V. Günther*, Vorlesung „Mathematik und Logik“, gehalten an der Universität Hamburg, Wintersemester 1994/1995

[11] *M. Meyling*, Hilbert II, Darstellung von formal korrektem mathematischen Wissen, http://www.qedeq.org/0_01_05/projektbeschreibung.pdf

# Index