Anfangsgründe der mathematischen Logik

Michael Meyling

21. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Das Projekt **Hilbert II** beschäftigt sich mit der formalen Darstellung und Dokumentation von mathematischem Wissen. Dazu stellt **Hilbert II** eine Programmsuite zur Lösung der damit zusammenhängenden Aufgaben bereit. Auch die konkrete Dokumentation mathematischen Grundlagenwissens mit diesen Hilfsmitteln gehört zum Ziel dieses Projekts. Für weitere Information über das Projekt **Hilbert II** siehe auch unter `http://www.qedeq.org/index_de.html`.

Dieses Dokument beschreibt die logischen Axiome, Schluss- und Metaregeln mit denen logische Schlüsse durchgeführt werden können.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise und in formaler Form. Dazu wird ein Kalkül angegeben, der es gestattet alle wahren Formeln abzuleiten. Weitere abgeleitete Regeln, Definitionen, Abkürzungen und Syntaxerweiterungen entsprechen im Wesentlichen der mathematischen Praxis.

Dieses Dokument liegt auch selbst in einer formalen Sprache vor, der Ursprungstext ist eine XML-Datei, deren Syntax mittels der XSD `http://www.qedeq.org/0_01_10/xml/qedeq.xsd` definiert wird.

Dieses Dokument ist noch sehr in Arbeit und wird von Zeit zu Zeit aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

Vorwort

Das ganze Universium der Mathematik kann mit den Mitteln der Mengenlehre entfaltet werden. Außer den Axiomen der Mengenlehre werden dazu nur noch logische Axiome und Regeln benötigt. Diese elementaren Grundlagen genügen, um die komplexesten mathematischen Strukturen zu definieren und Sätze über solche Strukturen beweisen zu können. Dieses Vorgehen lässt sich vollständig formalisieren und auf die einfache Manipulation von Zeichenketten zurückführen. Die inhaltliche Deutung der Zeichenfolgen stellt dann das mathematische Universum dar.

Dabei ist es natürlich mehr als nur bequem, Abkürzungen einzuführen und weitere abgeleitete Regeln zu verwenden. Diese Bequemlichkeiten können aber jederzeit[1] eliminiert und durch die grundlegenden Begrifflichkeiten ersetzt werden.

Dieses Projekt entspringt meinem Kindheitstraum eine solche Formalisierung konkret vorzunehmen. Inzwischen sind die technischen Möglichkeiten so weit entwickelt, dass eine Realisierung möglich erscheint.

Dank gebührt den Professoren *W. Kerby* und *V. Günther* der Hamburger Universität für ihre inspirierenden Vorlesungen zu den Themen Logik und Axiomatische Mengenlehre. Ohne diese entscheidenden Impulse hätte es dieses Projekt nie gegeben.

Besondere Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit – wobei der Verständnisgrad unseres Kleinkinds vielleicht noch nicht so stark ausgeprägt ist.

Hamburg, im August 2006

Michael Meyling

[1] Zumindest ist eine solche Rückführung theoretisch immer möglich. Praktisch kann sie jedoch an der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Zeit und des nutzbaren Raums scheitern. So wird es sicherlich nicht möglich sein, die natürliche Zahl 1.000.000.000 in Mengenschreibweise anzugeben.

Einleitung

An den Anfang sei ein Zitat aus einem von *D. Hilbert* im September 1922 gehaltenen Vortrag[2] mit dem programmatischen Titel „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ gesetzt.

> „Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:
>
> Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ ($\rightarrow$) und für „nicht“ ($\bar{\ }$) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist die Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas
>
> $$\frac{\begin{matrix} A \\ A \rightarrow B \end{matrix}}{B}$$
>
> wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln A und $A \rightarrow B$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel B eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“

In dem 1928 erschienenen Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* formulierten *D. Hilbert* und *W. Ackermann* ein axiomatisches System der Aussagenlogik, welches die Ausgangsbasis für das hier verwendete bildet. Durch das von *P. S. Novikov* 1959 angegebene Axiomensystem und Regelwerk der Prädikatenlogik wird das System verfeinert.

In diesem Text wird ein Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität und Funktoren vorgestellt, der die Ausgangsbasis für die Entwicklung der mathematischen Theorie darstellt. Es werden im Folgenden nur die Ergebnisse ohne weitere Beweise und in knapper Form präsentiert.

[2] Vortrag, gehalten in der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft. September 1922.

Kapitel 1

Sprache

Am Anfang steht die Logik. Sie stellt das Rüstzeug zur Argumentation bereit. Sie hilft beim Gewinnen von neuen Aussagen aus bereits vorhandenen. Sie ist universell anwendbar.

Die Grundlagen der bei **Hilbert II** verwendeten Logik werden hier zusammengestellt. Die folgende Kalkülsprache und ihre Axiome basieren auf den Formulierungen von *D. Hilbert*, *W. Ackermann*, *P. Bernays* und *P. S. Novikov.* Aus den hier angegebenen logischen Axiomen und den elementaren Schlussregeln können weitere Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Erst diese neuen Metaregeln führen zu einer komfortablen logischen Argumentation.

1.1 Terme und Formeln

TODO +++ evtl. Beschreibung eines Kalküls

Als Symbole kommen die *logischen Symbole* $L = \{$ '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$', '$\rightarrow$', '$\forall$', '$\exists$' $\}$, die *Prädikatenkonstanten* $C = \{c_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Funktionsvariablen*[1] $F = \{f_i^k \mid i, k \in \omega \wedge k > 0\}$, die *Funktionskonstanten*[2] $H = \{h_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Subjektvariablen* $V = \{v_i \mid i \in \omega\}$, sowie die *Prädikatenvariablen* $P = \{p_i^k \mid i, k \in \omega\}$ vor.[3] Unter der *Stellenzahl* eines Operators wird der obere Index verstanden. Die Menge der nullstelligen Prädikatenvariablen wird auch als Menge der *Aussagenvariablen* bezeichnet: $A := \{p_i^0 \mid i \in \omega\}$. Für die Subjektvariablen werden abkürzend auch bestimmte Kleinbuchstaben geschrieben. Die Kleinbuchstaben stehen für verschiedene Subjektvariablen: $v_1 =$ 'u', $v_2 =$ 'v', $v_3 =$ 'w', $v_4 =$ 'x', $v_5 =$ 'y', $v_5 =$ 'z'. Weiter werden als Abkürzungen verwendet: für die Prädikatenvariablen $p_1^n =$ 'ϕ' und $p_2^n =$ 'ψ', wobei die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird, für die Aussagenvariablen $a_1 =$ 'A', $a_2 =$ 'B' und $a_3 =$ 'C'. Als Abkürzungen für Funktionsvariablen wird festgelegt $f_1^n =$ 'f' und $f_2^n =$ 'g', wobei wiederum die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird. Bei allen aussagenlogischen zweistelligen Operatoren wird der leichteren Lesbarkeit wegen die Infixschreibweise benutzt, dabei werden die Symbole '('

[1] Funktionsvariablen dienen der einfacheren Notation und werden beispielsweise zur Formulierung eines identitätslogischen Satzes benötigt: $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$. Ausserdem bereitet ihre Einführung die spätere Syntaxerweiterung zur Anwendung von funktionalen Klassen vor.

[2] Funktionskonstanten dienen ebenfalls der Bequemlichkeit und werden später für direkt definierte Klassenfunktionen verwendet. So zum Beispiel zur Potenzklassenbildung, zur Vereinigungsklassenbildung und für die Nachfolgerfunktion. All diese Funktionskonstanten können auch als Abkürzungen verstanden werden.

[3] Unter ω werden die natürlichen Zahlen, die Null eingeschlossen, verstanden. Alle bei den Mengenbildungen beteiligten Symbole werden als paarweise verschieden vorausgesetzt. Das bedeutet z. B.: $f_i^k = f_{i'}^{k'} \rightarrow (k = k' \wedge i = i')$ und $h_i^k \neq v_j$.

und ‘)’ verwandt. D. h. für den Operator $\wedge$ mit den Argumenten A und B wird $(A \wedge B)$ geschrieben. Es gelten die üblichen Operatorprioritäten und die dazugehörigen Klammerregeln. Insbesondere die äußeren Klammern werden in der Regel weggelassen.

Nachfolgend werden die Operatoren mit absteigender Priorität aufgelistet.

$$\begin{array}{c} \neg, \forall, \exists \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow, \leftrightarrow \end{array}$$

Der Begriff *Term* wird im Folgenden rekursiv definiert:

1. Jede Subjektvariable ist ein Term.
2. Seien $i, k \in \omega$ und $t_1, \ldots, t_k$ Terme. Dann ist auch $h_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ und falls $k > 0$, so auch $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Alle nullstelligen Funktionskonstanten $\{h_i^0 \mid i, \in \omega\}$ sind demzufolge Terme, sie werden auch *Individuenkonstanten* genannt.[4]

Die Begriffe *Formel*, *freie* und *gebundene* Subjektvariable werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel, solche Formeln enthalten keine freien oder gebundenen Subjektvariablen.
2. Ist p^k eine k-stellige Prädikatenvariable und c^k eine k-stellige Prädikatenkonstante und sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ Terme, so sind $p^k(t_1, t_2, \ldots t_k)$ und $c^k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ Formeln. Dabei gelten alle in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommenden Subjektvariablen als freie Subjektvariablen, gebundene Subjektvariablen kommen nicht vor.[5]
3. Falls in der Formel α die Subjektvariable x_1 nicht gebunden vorkommt[6], dann sind auch $\forall x_1\ \alpha$ und $\exists x_1\ \alpha$ Formeln[7], und bis auf x_1 bleiben alle freien Subjektvariablen von α auch frei, und zu den gebundenen Subjektvariablen von α kommt x_1 hinzu.
4. Es seien α, β Formeln, in denen keine Subjektvariablen vorkommen, die in einer Formel gebunden und in der anderen frei sind. Dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln. Subjektvariablen, welche in α, β frei (bzw. gebunden) vorkommen, bleiben frei (bzw. gebunden).

Alle Formeln die nur durch Anwendung von 1. und 4. gebildet werden, heißen Formeln der *Aussagenalgebra*.

Es gilt für jede Formel α: die Menge der freien und der gebundenen Subjektvariablen von α sind disjunkt.

Falls eine Formel die Gestalt $\forall x_1\ \alpha$ bzw. $\exists x_1\ \alpha$ besitzt, dann heißt die Formel α der *Wirkungsbereich* des Quantors $\forall$ bzw. $\exists$.

Alle Formeln, die beim Aufbau einer Formel mittels 1. bis 4. benötigt werden, heißen *Teilformeln*.

[4] Analog dazu könnten Subjektvariablen auch als nullstellige Funktionsvariablen definiert werden. Da die Subjektvariablen jedoch eine hervorgehobene Rolle spielen, werden sie auch gesondert bezeichnet.

[5] Dieser zweite Punkt umfasst den ersten, welcher nur der Anschaulichkeit wegen extra aufgeführt ist.

[6] D. h. x_1 kommt höchstens frei vor.

[7] Dabei wird $\forall$ als *Allquantor* und $\exists$ als *Existenzquantor* bezeichnet

Kapitel 2

Axiome und Schlussregeln

Zunächst einmal beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der Aussagenlogik und wenden uns dann der Prädikatenlogik zu.

2.1 Aussagenlogische Axiome

Die aussagenlogischen Operatoren '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$' und '$\rightarrow$' verknüpfen beliebige *Aussagen* zu neuen Aussagen. Dabei verstehen wir unter einer Aussage eine Größe, die nur den Wert „wahr“ und „falsch“ annehmen kann.[1]

Der zweistellige Operator '$\vee$' (Oder-Verknüpfung) legt für die Aussagen α und β die neue Aussage $\alpha \vee \beta$ fest. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn wenigstens eine der ursprünglichen Aussagen wahr ist.

Durch den einstelligen Operator '$\neg$' wird zu einer Aussage α ihre *Negation* definiert. $\neg\alpha$ ist falsch, wenn α wahr ist und wahr wenn α falsch ist.

Die Implikation, die Und-Verknüpfung und die Äquivalenz werden als Abkürzungen definiert.[2]

Aus dem zweistelligen Operator '$\rightarrow$' lässt sich aus den Aussagen α und β die neue Aussage $\alpha \rightarrow \beta$ gewinnen. Diese Aussage ist dann und nur dann falsch, wenn α wahr und β falsch ist.

Definition 2.1 (Implikation)**.**

$$\alpha \rightarrow \beta \;:\leftrightarrow\; \neg\alpha \;\vee\; \beta$$

Definition der Und-Verknüpfung mittels De-Morgan.

Definition 2.2 (Und-Verknüpfung)**.**

$$\alpha \wedge \beta \;:\leftrightarrow\; \neg(\neg\alpha \;\vee\; \neg\beta)$$

Die logische Äquivalenz („genau dann, wenn“) wird wie üblich definiert.

Definition 2.3 (Äquivalenz)**.**

$$\alpha \wedge \beta \;:\leftrightarrow\; (\alpha \;\rightarrow\; \beta) \;\wedge\; (\beta \;\rightarrow\; \alpha)$$

[1] Später werden wir für die Wahrheitswerte die Symbole $\top$ und $\bot$ definieren.

[2] Eigentlich werden die Abkürzungssymbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ erst an dieser Stelle definiert und erweitern die Sprachsyntax. Aus Bequemlichkeitsgründen wurden diese Symbole bereits als logische Symbole angegeben.

Nun folgt unser erstes Axiom der Aussagenlogik. Mithilfe dieses Axioms können überflüssige Oder-Verknüpfungen entfernt werden.

Axiom 1 (Oder-Kürzung)**.**

$$(A \;\vee\; A) \;\rightarrow\; A$$

Wenn eine Aussage wahr ist, dann kann eine beliebige weitere Aussage mittels Oder-Verknüpfung hinzugefügt werden, ohne dass die Aussage falsch wird.

Axiom 2 (Oder-Verdünnung)**.**

$$A \;\rightarrow\; (A \;\vee\; B)$$

Die Oder-Verknüpfung soll kommutativ sein.

Axiom 3 (Oder-Vertauschung)**.**

$$(A \;\vee\; B) \;\rightarrow\; (B \;\vee\; A)$$

Eine Oder-Verknüpfung kann auf beiden Seiten einer Implikation hinzugefügt werden.

Axiom 4 (Oder-Vorsehung)**.**

$$(A \;\rightarrow\; B) \;\rightarrow\; ((C \;\vee\; A) \;\rightarrow\; (C \;\vee\; B))$$

MISSING!

Regel 1 (Abtrennung, Modus Ponens)**.** *Wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch β eine wahre Formel.*

MISSING!

Regel 2 (Abtrennung, Modus Ponens)**.** *Wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch β eine wahre Formel.*

Regel 3 (Einsetzung für Prädikatenvariable)**.** *Es sei α eine Formel, die die n-stellige Prädikatenvariable p enthält und $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige Formel mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, welche nicht in α vorkommen.*[3] *Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $p(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in α durch $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.*

- *α ist eine im Kalkül wahre Formel*
- *die freien Variablen von α sind disjunkt zu den gebundenen Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ und die gebundenen Variablen von α disjunkt zu den freien Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$*
- *Liegt das zu ersetzende $p(t_1, \ldots, t_n)$ in α im Wirkungsbereich eines Quantors, so kommt die zugehörige Subjektvariable in $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ nicht vor.*[4]

[3] In der Formel $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ können ausser den n Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ noch weitere Variablen frei vorkommen.

[4] D. h. nach dem Einsetzen werden – außer den in den für $x_1, \ldots, x_n$ eingesetzten Termen vorkommenden – keine weiteren Subjektvariablen gebunden.

2.2 Prädikatenlogische Axiome

Axiom 5.

$$(\forall x\ \phi(x)) \rightarrow \phi(y)$$

Axiom 6.

$$\phi(y) \rightarrow (\exists x\ \phi(x))$$

Regel 4 (Einsetzung für Funktionsvariablen). *Es sei α eine Formel, die die n-stellige Funktionsvariable σ enthält und $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebiger Term mit den Subjektvariablen x_1, …, x_n, welche nicht in α vorkommen.*[5] *Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen t_1, …, t_n in α durch $\tau(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.*

- *α ist eine im Kalkül wahre Formel*
- *die gebundenen Variablen von α sind disjunkt zu den Subjektvariablen von $\tau(x_1, \ldots, x_n)$*
- *Liegt das zu ersetzende $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ in α im Wirkungsbereich eines Quantors, so kommt die zugehörige Subjektvariable in $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ nicht vor, d. h. nach dem Einsetzen werden – außer den für x_1, …, x_n eingesetzten – keine weiteren Subjektvariablen gebunden.*

Regel 5 (Ersetzung für freie Subjektvariablen). *Ausgehend von einer wahren Formel kann jede freie Subjektvariable durch einen Term ersetzt werden, der keine in der Formel bereits gebundenen Subjektvariablen enthält. Die Ersetzung muss durchgängig in der gesamten Formel erfolgen.*

Regel 6 (Umbenennung für gebundene Subjektvariablen). *Aus jeder im Kalkül bereits gewonnenen Formel können weitere Formeln abgeleitet werden: Jede gebundene Subjektvariable kann in eine andere, nicht bereits frei vorkommende, Subjektvariable umbenannt werden. Die Umbenennung braucht nur im Wirkungsbereich eines bestimmten Quantors zu erfolgen.*

Regel 7 (Generalisierung). *Wenn $\alpha \rightarrow \beta(x_1)$ eine wahre Formel ist und α die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $\alpha \rightarrow (\forall x_1\ (\beta(x_1)))$ eine wahre Formel.*

Regel 8 (Partikularisierung). *Wenn $\alpha(x_1) \rightarrow \beta$ eine wahre Formel ist und β die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $(\exists x_1\ \alpha(x_1)) \rightarrow \beta$ eine wahre Formel.*

Die Auflösung und der Einsatz von Abkürzungen ist auch mit der Anwendung von Regeln verbunden. In vielen Texten zur mathematischen Logik werden diese Regeln nicht explizit formuliert, auch dieser Text geht darauf nicht weiter ein. In dem exakten Qedeq-Format gibt es jedoch entsprechende Regeln zur Verwendung von Abkürzungen.

[5] In dem Term $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ können ausser den n Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ noch weitere Variablen vorkommen.

Kapitel 3

Abgeleitete Sätze

+++ Fehlt noch.

3.1 Elementary Propositional Calculus

Aus den logischen Axiomen und Regeln von Abschnitt ssen sich wichtige elementare Sätze ableiten.

Definition 3.1. Die Prädikatskonstanten $\top$ für *true* oder *wahr* und $\bot$ für *false* oder *falsch* werden wie folgt definiert:

$$\top \Leftrightarrow A \vee \neg A \tag{3.1}$$
$$\bot \Leftrightarrow \neg \top \tag{3.2}$$

Die folgenden Formeln lassen sich beweisen.

Theorem 3.2.

$$
\begin{aligned}
& \top & & \qquad (3.3)\\
& \neg\bot & & \qquad (3.4)\\
A &\rightarrow A & & \qquad (3.5)\\
A &\leftrightarrow A & & \qquad (3.6)\\
A \vee B &\leftrightarrow B \vee A & & \qquad (3.7)\\
A \wedge B &\leftrightarrow B \wedge A & & \qquad (3.8)\\
(A \leftrightarrow B) &\leftrightarrow (B \leftrightarrow A) & & \qquad (3.9)\\
A \vee (B \vee C) &\leftrightarrow (A \vee B) \vee C & & \qquad (3.10)\\
A \wedge (B \wedge C) &\leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C & & \qquad (3.11)\\
A &\leftrightarrow A \vee A & & \qquad (3.12)\\
A &\leftrightarrow A \wedge A & & \qquad (3.13)\\
A &\leftrightarrow \neg\neg A & & \qquad (3.14)\\
(A \rightarrow B) &\leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) & & \qquad (3.15)\\
(A \rightarrow (B \rightarrow C)) &\leftrightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) & & \qquad (3.16)\\
\neg(A \vee B) &\leftrightarrow \neg A \wedge \neg B & & \qquad (3.17)\\
\neg(A \wedge B) &\leftrightarrow \neg A \vee \neg B & & \qquad (3.18)\\
A \vee (B \wedge C) &\leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) & & \qquad (3.19)\\
A \wedge (B \vee C) &\leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & & \qquad (3.20)\\
A \wedge \top &\leftrightarrow A & & \qquad (3.21)\\
A \wedge \bot &\leftrightarrow \bot & & \qquad (3.22)\\
A \vee \top &\leftrightarrow \top & & \qquad (3.23)\\
A \vee \bot &\leftrightarrow A & & \qquad (3.24)\\
A \vee \neg A &\leftrightarrow \top & & \qquad (3.25)\\
A \wedge \neg A &\leftrightarrow \bot & & \qquad (3.26)\\
(\top \rightarrow A) &\leftrightarrow A & & \qquad (3.27)\\
(\bot \rightarrow A) &\leftrightarrow \top & & \qquad (3.28)\\
(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow A \rightarrow C & & \qquad (3.29)\\
(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) &\rightarrow A \leftrightarrow C & & \qquad (3.30)\\
((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)) &\leftrightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) & & \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

3.2 Elementare Sätze der Prädikatenlogik

Aus den logischen Axiomen und Regeln von Abschnitt ssen sich auch für die Prädikatenlogik elementare Sätze ableiten.

Theorem 3.3.

$$
\begin{aligned}
\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) &\quad\rightarrow\quad \forall x\ (\phi(x)) \rightarrow \forall x\ (\psi(x)) && (3.32)\\
\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) &\quad\rightarrow\quad \exists x\ (\phi(x)) \rightarrow \exists x\ (\psi(x)) && (3.33)\\
\exists x\ (\phi(x) \land \psi(x)) &\quad\rightarrow\quad \exists x\ (\phi(x)) \land \exists x\ (\psi(x)) && (3.34)\\
\forall x\ (\psi(x)) \lor \forall x\ (\psi(x)) &\quad\rightarrow\quad \forall x\ (\phi(x) \lor \psi(x)) && (3.35)\\
\exists x\ (\phi(x) \lor \psi(x))) &\quad\leftrightarrow\quad \exists x\ (\phi(x)) \lor \exists x\ (\psi(x)) && (3.36)\\
\forall x\ (\phi(x) \land \psi(x))) &\quad\leftrightarrow\quad \forall x\ (\phi(x)) \land \forall x\ (\psi(x)) && (3.37)\\
\forall x\ \forall y\ (\phi(x,y)) &\quad\leftrightarrow\quad \forall y\ \forall x\ (\phi(x,y)) && (3.38)\\
\exists x\ \exists y\ (\phi(x,y)) &\quad\leftrightarrow\quad \exists y\ \exists x\ (\phi(x,y)) && (3.39)\\
\forall x\ (\phi(x) \rightarrow A) &\quad\leftrightarrow\quad (\forall x\ (\phi(x)) \rightarrow A) && (3.40)\\
\forall x\ (A \rightarrow \phi(x)) &\quad\leftrightarrow\quad (A \rightarrow \forall x\ (\phi(x))) && (3.41)\\
\forall x\ (\phi(x) \land A) &\quad\leftrightarrow\quad \forall x\ (\phi(x)) \land A && (3.42)\\
\forall x\ (\phi(x) \lor A) &\quad\leftrightarrow\quad (\forall x\ (\phi(x)) \lor A) && (3.43)\\
\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow A) &\quad\leftrightarrow\quad (\forall x\ (\phi(x)) \leftrightarrow A) && (3.44)
\end{aligned}
$$

+++ ergänzen

3.3 Abgeleitete Regeln

Aus den logischen Grundlagen lassen sich logische Sätze und Metaregeln ableiten, die eine bequemere Argumentation ermöglichen. Erst mit diesem Regelwerk und zusätzlichen Definitionen und Abkürzungen wird die restliche Mathematik entwickelt. Dabei wird stets nur eine *konservative* Erweiterung der bisherigen Syntax vorgenommen. D. h. in dem erweiterten System lassen sich keine Formeln ableiten, die in der alten Syntax formuliert, aber dort nicht ableitbar sind. Im Folgenden werden solche Erweiterungen vorgestellt.

Regel 9 (Ersetzung durch logisch äquivalente Formeln)**.** *Sei die Aussage $\alpha \leftrightarrow \beta$ bereits bewiesen. Wird dann aus der Formel δ eine neue Formel γ dadurch gewonnen, dass ein beliebiges Vorkommen von α durch β ersetzt*[1] *wird und besitzt γ zumindest die freien Variablen (+++ unklar!) von δ, dann gilt $\delta \leftrightarrow \gamma$.*

Regel 10 (Allgemeine Assoziativität)**.** *Falls ein zweistelliger Operator das Assoziativitätsgesetz erfüllt, so erfüllt er auch das allgemeine Assoziativitätsgesetz. Dem Operator kann dann eine beliebige Stellenanzahl größer eins zugeschrieben werden. So wird beispielsweise anstelle für $(a+b)+(c+d)$ einfach $a+b+c+d$ geschrieben.*[2]

Regel 11 (Allgemeine Kommutativität)**.** *Falls ein Operator das allgemeine Assoziativitätsgesetz erfüllt und kommutativ ist, so sind alle Permutationen von Parameterreihenfolgen einander gleich oder äquivalent.*[3] *So gilt beispielsweise $a+b+c+d = c+a+d+b$.*

Definition 3.4 (Ableitbarkeit)**.** Eine Formel β heißt *aus der Formel α ableitbar*, wenn sich β mit Hilfe aller Regeln des Prädikatenkalküls und der um α vermehrten Gesamtheit aller wahren Formeln des Prädikatenkalküls herleitbar und $\alpha \rightarrow \beta$ eine Formel ist. Dabei dürfen die beiden Quantifizierungsregeln, die Einsetzungsregel für Prädikatenvariable und die Umbenennungsregel für freie

[1] Bei dieser Ersetzung kann es erforderlich sein, dass gebundene Variablen von β umbenannt werden müssen, damit sich wieder eine Formel ergibt.

[2] Der n-stellig Operator wird mit einer bestimmten Klammerung definiert, jede andere Klammerreihenfolge liefert jedoch dasselbe Ergebnis.

[3] Je nachdem ob es sich um einen Termoperator oder einen Formeloperator handelt.

Subjektvariable nur auf solche Variablen angewendet werden, die in der Formel α nicht auftreten.

Schreibweise: $\alpha \vdash \beta$.

Die Ableitbarkeit einer Formel β aus der Formel α ist streng zu unterscheiden von der Ableitbarkeit einer wahren Formel aus den Axiomen des Kalküls, denn im zweiten Fall stehen mehr Ableitungsregeln zur Verfügung. Falls beispielsweise die Formel A als Axiom aufgenommen wird, so ist die Formel $A \to B$ herleitbar. Hingegen läßt sich aus A nicht B ableiten.

Regel 12 (Deduktionstheorem)**.** *Wenn eine Formel β aus einer Formel α ableitbar ist, so ist die Formel $\alpha \to \beta$ im Prädikatenkalkül herleitbar.*

Kapitel 4

Identität

+++ Fehlt noch

4.1 Axiome der Identität

Es wird eine zweistellige Funktionskonstante festgelegt, welche in der Interpretation die Identität von Subjekten ausdrücken soll.

Definition 4.1 (Gleichheit)**.**

$$x = y \ \Leftrightarrow \ c_1^2(x, y)$$

Dazu werden zwei weitere Axiome, auch *Gleichheitsaxiome* genannt, formuliert.

Axiom 7 (Reflexivität der Gleichheit)**.**

$$x = x$$

Axiom 8 (Leibnizsche Ersetzbarkeit)**.**

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$$

Theorem 4.2 (Symmetrie der Gleichheit)**.**

$$x = y \leftrightarrow y = x \tag{4.1}$$

Theorem 4.3 (Transitivität der Gleichheit)**.**

$$x = y \ \land \ y = z \rightarrow x = z \tag{4.2}$$

Theorem 4.4.

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y)) \tag{4.3}$$

Theorem 4.5.

$$x = y \rightarrow f(x) = f(y) \tag{4.4}$$

4.2 Eingeschränkte Quantoren

Bei der folgenden Definition muss die für $\psi(x)$ eingesetzte Formel „erkennen lassen“, über welche Subjektvariable quantifiziert wird. Das ist in der Regel darüber zu entscheiden, welche freie Subjektvariable als erstes in der Formel vorkommt.[1] In der exakten Syntax des Qedeq-Formats[2] ist die Subjektvariable immer angegeben.

[1] Beispielsweise ist in der folgenden Formel erkennbar, dass die zweite Quantifikation über die Subjektvariable m läuft: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in n\ m < n$.

[2] Siehe unter http://www.qedeq.org/0_01_05/projektbeschreibung.pdf.

Definition 4.6 (Eingeschränkter Allquantor)**.**

$$\forall\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \Leftrightarrow\ \forall\ x\ (\psi(x) \rightarrow \phi(x))$$

Dazu passt die folgende Definition für den eingeschränkten Existenzquantor.[3]

Definition 4.7 (Eingeschränkter Existenzquantor)**.**

$$\exists\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \Leftrightarrow\ \exists\ x\ (\psi(x) \wedge \phi(x))$$

Für die Existenz genau eines Individuums mit einer bestimmten Eigenschaft wird nun ein gesonderter Quantor eingeführt.

Definition 4.8 (Eingeschränkter Existenzquantor für genau ein Individuum)**.**

$$\exists!\ \psi(x)\ (\phi(x))\ \Leftrightarrow\ \exists\ \psi(x)\ (\phi(x) \wedge \forall\ \psi(y)\ (\phi(y) \rightarrow x = y))$$

Durch die Gültigkeit von $\exists!\ \psi(x)(\phi(x))$ kann daher eine Subjektkonstante definiert werden, wenn $\phi(x)$ und $\psi(x)$ durch Ausdrücke ersetzt werden, die ausser x keine freien Variablen, keine Prädikatsvariablen und keine Funktionsvariablen mehr enthält.

Regel 13 (Termdefinition durch Formel)**.** *Falls die Formel $\exists!x\ \alpha(x)$ gilt, dann kann die Termsyntax durch $D(x, \alpha(x))$ erweitert werden. Die Formel $alpha(x)$ möge die Variable y nicht enthalten und $\beta(y)$ sei eine Formel, welche die Variable x nicht enthält. Dann wird durch $\beta(D(x, \alpha(x)))$ eine Formel definiert durch $\beta(y) \wedge \exists!x\ (\alpha(x) \wedge x = y)$. Auch in der abkürzenden Schreibweise gilt die Subjektvariable x als gebunden, die Subjektvariable y ist mit den obigen Einschränkungen frei wählbar und wird in der Abkürzung nicht weiter beachtet. Veränderungen von α in eine andere Formel α', die eventuell erforderlich sind, damit keine Variablenkollisionen mit Variablen aus β entstehen, müssen jedoch auch in der Abkürzung durchgeführt werden. Alle Termbildungsregeln werden entsprechend erweitert. Der Ausdruck ist auch ersetzbar durch $\exists!y\ (\beta(y) \wedge \alpha(y)$ oder durch $\beta(y) \wedge \alpha(y)$.*

Für eingeschränkte Quantoren gelten analog zu tsprechende Formeln.
+++

[3]Passend, da $\neg\forall\ \psi(x)\ (\phi(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ \neg(\psi(x) \rightarrow \phi(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\psi(x) \wedge \neg\phi(x)) \leftrightarrow \exists\ \psi(x)\ (\neg\phi(x))$.

Literaturverzeichnis

[1] *A.N. Whitehead, B. Russell*, Principia Mathematica, Cambridge University Press, London 1910

[2] *P. Bernays*, Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“, Math. Zeitschr. 25 (1926), 305-320

[3] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, Berlin 1928

[4] *P.S. Novikov*, Grundzüge der mathematischen Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973

[5] *V. Günther*, Vorlesung „Mathematik und Logik“, gehalten an der Universität Hamburg, Wintersemester 1994/1995

[6] *M. Meyling*, Hilbert II, Darstellung von formal korrektem mathematischen Wissen, Grobkonzept, http://www.qedeq.org/0_01_10/doc/project/qedeq_basic_concept_de.pdf

Index