Anfangsgründe der mathematischen Logik

Michael Meyling

2. August 2008

Die Quelle für dieses Dokument ist hier zu finden:

http://qedeq.org/0_03_11/doc/math/qedeq_logic_v1.xml

Die vorliegende Publikation ist urheberrechtlich geschützt.

Bei Fragen, Anregungen oder Bitte um Aufnahme in die Liste der abhängigen Module schicken Sie bitte eine EMail an die Addresse mailto:mime@qedeq.org

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung **5**

Vorwort **7**

Einleitung **9**

1 Sprache **11**
1.1 Terme und Formeln 11

2 Axiome und Schlussregeln **13**
2.1 Axiome 13
2.2 Ableitungsregeln 14

3 Abgeleitete Sätze **17**
3.1 Aussagenlogik 17
3.2 Prädikatenlogik 18
3.3 Abgeleitete Regeln 18

4 Identität **21**
4.1 Axiome der Identität 21
4.2 Eingeschränkte Quantoren 22

Literaturverzeichnis **23**

Zusammenfassung

Das Projekt **Hilbert II** beschäftigt sich mit der formalen Darstellung und Dokumentation von mathematischem Wissen. Dazu stellt **Hilbert II** eine Programmsuite zur Lösung der damit zusammenhängenden Aufgaben bereit. Auch die konkrete Dokumentation mathematischen Grundlagenwissens mit diesen Hilfsmitteln gehört zum Ziel dieses Projekts. Für weitere Information über das Projekt **Hilbert II** siehe auch unter http://www.qedeq.org/index_de.html.

Dieses Dokument beschreibt die logischen Axiome, Schluss- und Metaregeln mit denen logische Schlüsse durchgeführt werden können.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise und in formaler Form. Dazu wird ein Kalkül angegeben, der es gestattet alle wahren Formeln abzuleiten. Weitere abgeleitete Regeln, Definitionen, Abkürzungen und Syntaxerweiterungen entsprechen im Wesentlichen der mathematischen Praxis.

Dieses Dokument liegt auch selbst in einer formalen Sprache vor, der Ursprungstext ist eine XML-Datei, deren Syntax mittels der XSD http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq.xsd definiert wird.

Dieses Dokument ist noch sehr in Arbeit und wird von Zeit zu Zeit aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

Vorwort

Das ganze Universium der Mathematik kann mit den Mitteln der Mengenlehre entfaltet werden. Außer den Axiomen der Mengenlehre werden dazu nur noch logische Axiome und Regeln benötigt. Diese elementaren Grundlagen genügen, um die komplexesten mathematischen Strukturen zu definieren und Sätze über solche Strukturen beweisen zu können. Dieses Vorgehen lässt sich vollständig formalisieren und auf die einfache Manipulation von Zeichenketten zurückführen. Die inhaltliche Deutung der Zeichenfolgen stellt dann das mathematische Universum dar.

Dabei ist es natürlich mehr als nur bequem, Abkürzungen einzuführen und weitere abgeleitete Regeln zu verwenden. Diese Bequemlichkeiten können aber jederzeit[1] eliminiert und durch die grundlegenden Begrifflichkeiten ersetzt werden.

Dieses Projekt entspringt meinem Kindheitstraum eine solche Formalisierung konkret vorzunehmen. Inzwischen sind die technischen Möglichkeiten so weit entwickelt, dass eine Realisierung möglich erscheint.

Dank gebührt den Professoren *W. Kerby* und *V. Günther* der Hamburger Universität für ihre inspirierenden Vorlesungen zu den Themen Logik und Axiomatische Mengenlehre. Ohne diese entscheidenden Impulse hätte es dieses Projekt nie gegeben.

Besonderer Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit – wobei der Verständnisgrad unseres Kleinkinds vielleicht noch nicht so stark ausgeprägt ist.

Hamburg, Januar 2008

Michael Meyling

[1] Zumindest ist eine solche Rückführung theoretisch immer möglich. Praktisch kann sie jedoch an der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Zeit und des nutzbaren Raums scheitern. So wird es sicherlich nicht möglich sein, die natürliche Zahl 1.000.000.000 in Mengenschreibweise anzugeben.

Einleitung

An den Anfang sei ein Zitat aus einem von *D. Hilbert* im September 1922 gehaltenen Vortrag[2] mit dem programmatischen Titel „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ gesetzt.

> „Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:
>
> Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ ($\rightarrow$) und für „nicht“ ($^{-}$) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist die Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas
>
> $$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$
>
> wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln A und $A \rightarrow B$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel B eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“

Am Anfang steht die Logik. Sie stellt das Rüstzeug zur Argumentation bereit. Sie hilft beim Gewinnen von neuen Aussagen aus bereits vorhandenen. Sie ist universell anwendbar.

In dem 1928 erschienenen Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* formulierten *D. Hilbert* und *W. Ackermann* ein axiomatisches System der Aussagenlogik, welches die Basis für das hier verwendete bildet. Durch das von *P. S. Novikov* 1959 angegebene Axiomensystem und Regelwerk der Prädikatenlogik wird das System verfeinert.

In diesem Text wird ein Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität und Funktoren vorgestellt, der die Grundlagen für die Entwicklung der mathematischen Theorie schafft. Es werden im Folgenden nur die Ergebnisse ohne weitere Beweise und in knapper Form präsentiert.

[2] Vortrag, gehalten in der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft. September 1922.

Kapitel 1

Sprache

Die Grundlagen der bei **Hilbert II** verwendeten Logik werden hier zusammengestellt. Die folgende Kalkülsprache und ihre Axiome basieren auf den Formulierungen von *D. Hilbert*, *W. Ackermann*, *P. Bernays* und *P. S. Novikov*. Aus den hier angegebenen logischen Axiomen und den elementaren Schlussregeln können weitere Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Erst diese neuen Metaregeln führen zu einer komfortablen logischen Argumentation.

1.1 Terme und Formeln

Als Symbole kommen die *logischen Symbole* $L = \{$ '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$', '$\rightarrow$', '$\forall$', '$\exists$' $\}$, die *Prädikatenkonstanten* $C = \{c_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Funktionsvariablen*[1] $F = \{f_i^k \mid i, k \in \omega \wedge k > 0\}$, die *Funktionskonstanten*[2] $H = \{h_i^k \mid i, k \in \omega\}$, die *Subjektvariablen* $V = \{v_i \mid i \in \omega\}$, sowie die *Prädikatenvariablen* $P = \{p_i^k \mid i, k \in \omega\}$ vor.[3] Unter der *Stellenzahl* eines Operators wird der obere Index verstanden. Die Menge der nullstelligen Prädikatenvariablen wird auch als Menge der *Aussagenvariablen* bezeichnet: $A := \{p_i^0 \mid i \in \omega\}$. Für die Subjektvariablen werden abkürzend auch bestimmte Kleinbuchstaben geschrieben. Die Kleinbuchstaben stehen für verschiedene Subjektvariablen: $v_1 =$ 'u', $v_2 =$ 'v', $v_3 =$ 'w', $v_4 =$ 'x', $v_5 =$ 'y', $v_5 =$ 'z'. Weiter werden als Abkürzungen verwendet: für die Prädikatenvariablen $p_1^n =$ 'ϕ' und $p_2^n =$ 'ψ', wobei die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird, für die Aussagenvariablen $a_1 =$ 'A', $a_2 =$ 'B' und $a_3 =$ 'C'. Als Abkürzungen für Funktionsvariablen wird festgelegt $f_1^n =$ 'f' und $f_2^n =$ 'g', wobei wiederum die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird. Bei allen aussagenlogischen zweistelligen Operatoren wird der leichteren Lesbarkeit wegen die Infixschreibweise benutzt, dabei werden die Symbole '(' und ')' verwandt. D. h. für den Operator $\wedge$ mit den Argumenten A und B wird $(A \wedge B)$ geschrieben. Es gelten die üblichen Operatorprioritäten und die dazugehörigen Klammerregeln. Insbesondere die äußeren Klammern werden in der Regel weggelassen.

[1] Funktionsvariablen dienen der einfacheren Notation und werden beispielsweise zur Formulierung eines identitätslogischen Satzes benötigt: $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$. Ausserdem bereitet ihre Einführung die spätere Syntaxerweiterung zur Anwendung von funktionalen Klassen vor.

[2] Funktionskonstanten dienen ebenfalls der Bequemlichkeit und werden später für direkt definierte Klassenfunktionen verwendet. So zum Beispiel zur Potenzklassenbildung, zur Vereinigungsklassenbildung und für die Nachfolgerfunktion. All diese Funktionskonstanten können auch als Abkürzungen verstanden werden.

[3] Unter ω werden die natürlichen Zahlen, die Null eingeschlossen, verstanden. Alle bei den Mengenbildungen beteiligten Symbole werden als paarweise verschieden vorausgesetzt. Das bedeutet z. B.: $f_i^k = f_{i'}^{k'} \rightarrow (k = k' \wedge i = i')$ und $h_i^k \neq v_j$.

Nachfolgend werden die Operatoren mit absteigender Priorität aufgelistet.

$$\begin{gathered}\neg, \forall, \exists \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow, \leftrightarrow\end{gathered}$$

Der Begriff *Term* wird im Folgenden rekursiv definiert:

1. Jede Subjektvariable ist ein Term.
2. Seien $i, k \in \omega$ und $t_1, \ldots, t_k$ Terme. Dann ist auch $h_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ und falls $k > 0$, so auch $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Alle nullstelligen Funktionskonstanten $\{h_i^0 \mid i, \in \omega\}$ sind demzufolge Terme, sie werden auch *Individuenkonstanten* genannt.[4]

Die Begriffe *Formel*, *freie* und *gebundene* Subjektvariable werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel, solche Formeln enthalten keine freien oder gebundenen Subjektvariablen.
2. Ist p^k eine k-stellige Prädikatenvariable und c^k eine k-stellige Prädikatenkonstante und sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ Terme, so sind $p^k(t_1, t_2, \ldots t_k)$ und $c^k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ Formeln. Dabei gelten alle in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommenden Subjektvariablen als freie Subjektvariablen, gebundene Subjektvariablen kommen nicht vor.[5]
3. Es seien α, β Formeln, in denen keine Subjektvariablen vorkommen, die in einer Formel gebunden und in der anderen frei sind. Dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln. Subjektvariablen, welche in α oder β frei (bzw. gebunden) vorkommen, bleiben frei (bzw. gebunden).
4. Falls in der Formel α die Subjektvariable x_1 nicht gebunden vorkommt[6], dann sind auch $\forall x_1\ \alpha$ und $\exists x_1\ \alpha$ Formeln. Dabei wird $\forall$ als *Allquantor* und $\exists$ als *Existenzquantor* bezeichnet. Bis auf x_1 bleiben alle freien Subjektvariablen von α auch frei, und zu den gebundenen Subjektvariablen von α kommt x_1 hinzu.

Alle Formeln die nur durch Anwendung von 1. und 3. gebildet werden, heißen Formeln der *Aussagenalgebra*.

Es gilt für jede Formel α: die Menge der freien und der gebundenen Subjektvariablen von α sind disjunkt.[7]

Falls eine Formel die Gestalt $\forall x_1\ \alpha$ bzw. $\exists x_1\ \alpha$ besitzt, dann heißt die Formel α der *Wirkungsbereich* des Quantors $\forall$ bzw. $\exists$.

Alle Formeln, die beim Aufbau einer Formel mittels 1. bis 4. benötigt werden, heißen *Teilformeln*.

[4] Analog dazu könnten Subjektvariablen auch als nullstellige Funktionsvariablen definiert werden. Da die Subjektvariablen jedoch eine hervorgehobene Rolle spielen, werden sie auch gesondert bezeichnet.

[5] Dieser zweite Punkt umfasst den ersten, welcher nur der Anschaulichkeit wegen extra aufgeführt ist.

[6] D. h. x_1 kommt höchstens frei vor.

[7] Andere Formalisierungen erlauben z. B. $\forall x_1\ \alpha$ auch dann, wenn x_1 schon in α gebunden vorkommt. Auch Ausdrücke wie $\alpha(x) \wedge (\forall x_1 \beta)$ sind erlaubt. Dort wird dann für ein einzelnes Vorkommen einer Variablen definiert ob es sich um ein freies oder gebundenes Vorkommen handelt.

Kapitel 2

Axiome und Schlussregeln

Nun geben wir das Axiomensystem für die Prädikatenlogik an und formulieren die Regeln um daraus neue Formeln zu gewinnen.

2.1 Axiome

Die aussagenlogischen Operatoren '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\leftrightarrow$' und '$\rightarrow$' verknüpfen beliebige *Aussagen* zu neuen Aussagen. Dabei verstehen wir unter einer Aussage eine Größe, die nur den Wert „wahr" und „falsch" annehmen kann.[1]

Für die Prädikatenlogik wird der Umgang mit Quantoren hinzugefügt.

Der zweistellige Operator '$\vee$' (Oder-Verknüpfung) legt für die Aussagen α und β die neue Aussage $\alpha \vee \beta$ fest. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn wenigstens eine der ursprünglichen Aussagen wahr ist.

Durch den einstelligen Operator '$\neg$' wird zu einer Aussage α ihre *Negation* definiert. $\neg\alpha$ ist falsch, wenn α wahr ist und wahr wenn α falsch ist.

Die Implikation, die Und-Verknüpfung und die logische Äquivalenz werden als Abkürzungen definiert.[2]

Die logische Implikation kann wie folgt definiert werden.

Definition 2.1 (Implikation)**.**

$$\alpha \rightarrow \beta \;:\leftrightarrow\; \neg\alpha \;\vee\; \beta$$

Definition der Und-Verknüpfung mittels De-Morgan.

Definition 2.2 (Und-Verknüpfung)**.**

$$\alpha \wedge \beta \;:\leftrightarrow\; \neg(\neg\alpha \;\vee\; \neg\beta)$$

Die logische Äquivalenz („genau dann, wenn") wird wie üblich definiert.

Definition 2.3 (Äquivalenz)**.**

$$\alpha \wedge \beta \;:\leftrightarrow\; (\alpha \;\rightarrow\; \beta) \;\wedge\; (\beta \;\rightarrow\; \alpha)$$

Nun folgt unser erstes Axiom der Aussagenlogik. Mithilfe dieses Axioms können überflüssige Oder-Verknüpfungen entfernt werden.

Axiom 1 (Oder-Kürzung)**.**

[1] Später werden wir für die Wahrheitswerte die Symbole $\top$ und $\bot$ definieren.

[2] Eigentlich werden die Abkürzungssymbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ erst an dieser Stelle definiert und erweitern die Sprachsyntax. Aus Bequemlichkeitsgründen wurden diese Symbole bereits als logische Symbole angegeben.

$$(A \vee A) \rightarrow A$$

Wenn eine Aussage wahr ist, dann kann eine beliebige weitere Aussage mittels Oder-Verknüpfung hinzugefügt werden, ohne dass die Aussage falsch wird.

Axiom 2 (Oder-Verdünnung)**.**

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

Die Oder-Verknüpfung soll kommutativ sein.

Axiom 3 (Oder-Vertauschung)**.**

$$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$$

Eine Oder-Verknüpfung kann auf beiden Seiten einer Implikation hinzugefügt werden.

Axiom 4 (Oder-Vorsehung)**.**

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$$

Wenn ein Prädikat auf alle x zutrifft, so trifft es auch auf ein beliebiges y zu.

Axiom 5 (Spezialisierung)**.**

$$\forall x\ \phi(x) \rightarrow \phi(y)$$

Wenn ein Prädikat auf irgend ein y zutrifft, so gibt es ein x, auf das es zutrifft.

Axiom 6 (Existenz)**.**

$$\phi(y) \rightarrow \exists x\ \phi(x)$$

2.2 Ableitungsregeln

Die im folgenden angegebenen Regeln ermöglichen uns aus den wahr angesehenen Axiomen neue wahre Formeln zu gewinnen. Aus diesen können wiederum weitere Formeln abgeleitet werden, so dass sich die Menge der wahren Formeln sukzessive erweitern lässt.

Regel 1 (Abtrennung, Modus Ponens)**.** *Wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch β eine wahre Formel.*

Regel 2 (Ersetzung für freie Subjektvariable)**.** *Ausgehend von einer wahren Formel kann jede freie Subjektvariable durch einen Term ersetzt werden, der keine in der Formel bereits gebundenen Subjektvariablen enthält. Die Ersetzung muss durchgängig in der gesamten Formel erfolgen.*

Das Verbot in dem Term Subjektvariablen zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommen, dient nicht nur der Absicherung der Wohlgeformtheit, sondern besitzt auch eine inhaltliche Bedeutung. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$\forall x\ \exists y\ \phi(x,y)$	$\rightarrow$	$\exists y\ \phi(z,y)$	mit Axiom 5
$\forall x\ \exists y\ \phi(x,y)$	$\rightarrow$	$\exists y\ \phi(y,y)$	verbotene Ersetzung: z durch y, obwohl y bereits gebunden
$\forall x\ \exists y\ x \neq y$	$\rightarrow$	$\exists y\ \neq y$	Einsetzung von $\neq$ für ϕ

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht gültig.

Regel 3 (Umbenennung für gebundene Subjektvariable)**.** *Jede gebundene Subjektvariable kann in eine andere, nicht bereits frei vorkommende, Subjektvariable umbenannt werden. Falls über umzubenennende Variable mehrfach quantifiziert wird, dann braucht die Umbenennung nur im Wirkungsbereich eines bestimmten Quantors zu erfolgen.*

Regel 4 (Einsetzung für Prädikatenvariable)**.** *Es sei α eine wahre Formel, die die n-stellige Prädikatenvariable p enthält, $x_1, \ldots, x_n$ seien Subjektvariable und $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige Formel in der die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht gebunden sind. In der Formel $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ müssen jedoch nicht alle $x_1, \ldots, x_n$ als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin können auch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $p(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in α durch $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- *die freien Variablen von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ ohne $x_1, \ldots, x_n$ kommen nicht in α als gebundene Variablen vor*
- *jedes Vorkommen von $p(t_1, \ldots, t_n)$ in α enthält keine gebundene Variable von $\beta(x_1, \ldots, x_n)$*
- *das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel*

Siehe III §5 in [3].

Das Verbot in der Ersetzungsformel keine zusätzliche Subjektvariable zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommt, hat nicht nur der Absicherung der Wohlgeformtheit zum Zweck. Es bewahrt auch die inhaltliche Gültigkeit. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$\phi(x)$	$\rightarrow$	$\exists y\ \phi(y)$	mit Axiom 6
$(\exists y\ y = y) \wedge \phi(x)$	$\rightarrow$	$\exists y\ \phi(y)$	
$\exists y\ (y = y \wedge \phi(x))$	$\rightarrow$	$\exists y\ \phi(y)$	
$\exists y\ (y = y \wedge x \neq y)$	$\rightarrow$	$\exists y\ y \neq y$	verbotene Ersetzung: $\phi(x)$ durch $x \neq y$, obwohl y bereits gebunden
$\exists y\ x \neq y$	$\rightarrow$	$\exists y\ y \neq y$	

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht gültig.

Analog zu Regel 4 können wir auch Funktionsvariablen ersetzen.

Regel 5 (Einsetzung für Funktionsvariable)**.** *Es sei α eine bereits bewiesene Formel, die die n-stellige Funktionsvariable σ enthält, $x_1, \ldots, x_n$ seien Subjektvariable und $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ ein beliebiger Term in dem die Subjektvariablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht gebunden sind. In dem Term $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ müssen nicht alle $x_1, \ldots, x_n$ als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin können auch noch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen $t_1, \ldots, t_n$ in α durch $\tau(t_1, \ldots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- *die freien Variablen von $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ ohne $x_1, \ldots, x_n$ kommen in α nicht als gebundene Variablen vor*

- *jedes Vorkommen von* $\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ *in* α *enthält keine gebundene Variable von* $\beta(x_1, \ldots, x_n)$
- *das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel*

Regel 6 (Hintere Generalisierung)**.** *Wenn* $\alpha \to \beta(x_1)$ *eine wahre Formel ist und* α *die Subjektvariable* x_1 *nicht enthält, dann ist auch* $\alpha \to (\forall x_1\ (\beta(x_1)))$ *eine wahre Formel.*

Regel 7 (Vordere Partikularisierung)**.** *Wenn* $\alpha(x_1) \to \beta$ *eine wahre Formel ist und* β *die Subjektvariable* x_1 *nicht enthält, dann ist auch* $(\exists x_1\ \alpha(x_1)) \to \beta$ *eine wahre Formel.*

Die Auflösung und der Einsatz von Abkürzungen und Konstanten ist auch mit der Anwendung von Regeln verbunden. In vielen Texten zur mathematischen Logik werden diese Regeln nicht explizit formuliert, auch dieser Text geht darauf nicht weiter ein. In dem exakten QEDEQ-Format gibt es jedoch entsprechende Regeln.

Kapitel 3

Abgeleitete Sätze

Mit den im Kapitel 2 angegebenen Axiomen und Schlussregeln lassen sich elementare logische Gesetzmäßigkeiten ableiten.

3.1 Aussagenlogik

Zunächst behandeln wir die Aussagenlogik.

Um das Prädikat *wahr* zu definieren, kombinieren wir einfach ein Prädikat und seine Negation.

Definition 3.1 (Wahr)**.**

$$\top \;:\leftrightarrow\; A \lor \neg A$$

Für das Prädikat *falsch* negieren wir einfach *wahr*.

Definition 3.2 (Falsch)**.**

$$\bot \;:\leftrightarrow\; \neg\top$$

Wir haben die folgenden elementaren Aussagen.

Proposition 3.3 (Elementare Sätze)**.**

$$\top \tag{aa}$$
$$\neg\bot \tag{ab}$$
$$A \to A \tag{ac}$$
$$A \leftrightarrow A \tag{ad}$$
$$(A \lor B) \leftrightarrow (B \lor A) \tag{ae}$$
$$(A \land B) \leftrightarrow (B \land A) \tag{af}$$
$$(A \land B) \to A \tag{ag}$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A) \tag{ah}$$
$$(A \lor (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \lor C) \tag{ai}$$
$$(A \land (B \land C)) \leftrightarrow ((A \land B) \land C) \tag{aj}$$
$$A \leftrightarrow (A \lor A) \tag{ak}$$
$$A \leftrightarrow (A \land A) \tag{al}$$
$$A \leftrightarrow \neg\neg A \tag{am}$$
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A) \tag{an}$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B) \tag{ao}$$
$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C)) \tag{ap}$$
$$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B) \tag{aq}$$
$$\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B) \tag{ar}$$
$$(A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C)) \tag{as}$$

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \tag{at}$$
$$(A \wedge \top) \leftrightarrow A \tag{au}$$
$$(A \wedge \bot) \leftrightarrow \bot \tag{av}$$
$$(A \vee \top) \leftrightarrow \top \tag{aw}$$
$$(A \vee \bot) \leftrightarrow A \tag{ax}$$
$$(A \vee \neg A) \leftrightarrow \top \tag{ay}$$
$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \bot \tag{az}$$
$$(\top \rightarrow A) \leftrightarrow A \tag{ba}$$
$$(\bot \rightarrow A) \leftrightarrow \top \tag{bb}$$
$$(A \rightarrow \bot) \leftrightarrow \neg A \tag{bc}$$
$$(A \rightarrow \top) \leftrightarrow \top \tag{bd}$$
$$(A \leftrightarrow \top) \leftrightarrow A \tag{be}$$
$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \tag{bf}$$
$$((A \leftrightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow B)) \rightarrow (A \leftrightarrow C) \tag{bg}$$
$$((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \tag{bh}$$
$$((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)) \leftrightarrow \neg A \tag{bi}$$
$$(A \leftrightarrow (A \wedge B)) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \tag{bj}$$

3.2 Prädikatenlogik

Für die Prädikatenlogik ergeben sich die folgenden Sätze.

Wir haben die folgenden elementaren Aussagen.

Proposition 3.4 (Elementare Sätze)**.**

$$\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\ \phi(x) \rightarrow \forall x\ \psi(x)) \tag{a}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists x\ \phi(x) \rightarrow \exists x\ \psi(x)) \tag{b}$$
$$\exists x\ (\phi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (\exists x\ \phi(x) \wedge \exists x\ \psi(x)) \tag{c}$$
$$(\forall x\ \psi(x) \vee \forall x\ \psi(x)) \rightarrow \forall x\ (\phi(x) \vee \psi(x)) \tag{d}$$
$$\exists x\ (\phi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x\ \phi(x) \vee \exists x\ \psi(x)) \tag{e}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x\ \phi(x) \wedge \forall x\ \psi(x)) \tag{f}$$
$$\forall x\ \forall y\ \phi(x,y) \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ \phi(x,y) \tag{g}$$
$$\exists x\ \exists y\ \phi(x,y) \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ \phi(x,y) \tag{h}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \rightarrow A) \leftrightarrow (\forall x\ \phi(x) \rightarrow A) \tag{i}$$
$$\forall x\ (A \rightarrow \phi(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x\ \phi(x)) \tag{j}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \wedge A) \leftrightarrow (\forall x\ \phi(x) \wedge A) \tag{k}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \vee A) \leftrightarrow (\forall x\ \phi(x) \vee A) \tag{l}$$
$$\forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow A) \leftrightarrow (\forall x\ \phi(x) \leftrightarrow A) \tag{m}$$

3.3 Abgeleitete Regeln

Aus den logischen Grundlagen lassen sich logische Sätze und Metaregeln ableiten, die eine bequemere Argumentation ermöglichen. Erst mit diesem Regelwerk und zusätzlichen Definitionen und Abkürzungen wird die restliche Mathematik entwickelt. Dabei wird stets nur eine *konservative* Erweiterung der bisherigen Syntax vorgenommen. D. h. in dem erweiterten System lassen sich keine Formeln ableiten, die in der alten Syntax formuliert, aber dort nicht ableitbar sind. Im Folgenden werden solche konservativen Erweiterungen vorgestellt.

Regel 8 (Ersetzung durch logisch äquivalente Formeln)**.** *Sei die Aussage $\alpha \leftrightarrow \beta$ bereits bewiesen. Wird dann aus der Formel δ eine neue Formel γ dadurch gewonnen, dass ein beliebiges Vorkommen von α durch β ersetzt*[1] *wird und besitzt*

[1] Bei dieser Ersetzung kann es erforderlich sein, dass gebundene Variablen von β umbenannt werden müssen, damit sich wieder eine Formel ergibt.

γ zumindest die freien Variablen von δ, dann gilt $\delta \leftrightarrow \gamma$.

Regel 9 (Allgemeine Assoziativität)**.** *Falls ein zweistelliger Operator das Assoziativitätsgesetz erfüllt, so erfüllt er auch das allgemeine Assoziativitätsgesetz. Dem Operator kann dann eine beliebige Stellenanzahl größer eins zugeschrieben werden. So wird beispielsweise anstelle für $(a+b)+(c+d)$ einfach $a+b+c+d$ geschrieben.*[2]

Regel 10 (Allgemeine Kommutativität)**.** *Falls ein Operator das allgemeine Assoziativitätsgesetz erfüllt und kommutativ ist, so sind alle Permutationen von Parameterreihenfolgen einander gleich oder äquivalent.*[3] *So gilt beispielsweise $a+b+c+d = c+a+d+b$.*

Regel 11 (Ableitbarkeit aus einer Formel)**.** *Eine Formel β heißt* aus der Formel α ableitbar*, wenn sich β mit Hilfe aller Regeln des Prädikatenkalküls und der um α vermehrten Gesamtheit aller wahren Formeln des Prädikatenkalküls herleitbar und $\alpha \rightarrow \beta$ eine Formel ist. Dabei dürfen die beiden SQuantifizierungsregeln, die Einsetzungsregel für Prädikatenvariable und die Umbenennungsregel für freie Subjektvariable nur auf solche Variablen angewendet werden, die in der Formel α nicht auftreten.*

Schreibweise: $\alpha \vdash \beta$.

Die Ableitbarkeit einer Formel β aus der Formel α ist streng zu unterscheiden von der Ableitbarkeit einer wahren Formel aus den Axiomen des Kalküls, denn im zweiten Fall stehen mehr Ableitungsregeln zur Verfügung. Falls beispielsweise die Formel A als Axiom aufgenommen wird, so ist die Formel A herleitbar. Hingegen läßt sich aus A nicht B ableiten.

Regel 12 (Deduktionstheorem)**.** *Wenn eine Formel β aus einer Formel α ableitbar ist, so ist die Formel $\alpha \rightarrow \beta$ im Prädikatenkalkül herleitbar.*

[2] Der n-stellig Operator wird mit einer bestimmten Klammerung definiert, jede andere Klammerreihenfolge liefert jedoch dasselbe Ergebnis.

[3] Je nachdem ob es sich um einen Termoperator oder einen Formeloperator handelt.

Kapitel 4

Identität

Alles was existiert besitzt eine spezifische Natur. Jede Entität existiert als etwas besonderes und besitzt charakterisierende Merkmale. Identität ist etwas, das eine Entität definierbar und erkennbar macht im Sinne einer Menge von Eigenschaften oder Merkmalen, welche sie von anderen Entitiäten unterscheiden. Eine Entität kann mehrere Merkmale besitzen, aber alle Merkmale die sie besitzt ist Teil ihrer Identität.

4.1 Axiome der Identität

Wir starten mit den Identitätsaxiomen.

Es wird eine zweistellige Prädikatskonstante festgelegt, welche in der Interpretation die Identität von Subjekten ausdrücken soll.

Initiale Definition 4.1 (Identität)**.**

$$x = y$$

Aus Bequemlichkeit definieren wir auch die Negation der Identitätskonstante.

Definition 4.2 (Verschiedenheit)**.**

$$x \neq y :\leftrightarrow \neg x = y$$

Axiom 7 (Reflexivität der Identität)**.**

$$x = x$$

Axiom 8 (Leibnizsche Ersetzbarkeit)**.**

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$$

Axiom 9 (Symmetrie der Identität)**.**

$$x = y \rightarrow y = x$$

Axiom 10 (Transitivität der Identität)**.**

$$(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$$

Bei der Leibnizschen Ersetzbarkeit können wir die zweite Implikation umkehren.

Proposition 4.3.

$$x \;=\; y \;\rightarrow\; (\phi(x) \;\leftrightarrow\; \phi(y))$$

Proposition 4.4.

$$x \;=\; y \;\rightarrow\; f(x) \;=\; f(y)$$

4.2 Eingeschränkte Quantoren

Jede Quantifizierung benötigt eine Subjektvariable und einen Bereich über den die Quantifizierung läuft. Bis jetzt haben wir einen festen Bereich für jede Quantifizierung vorausgesetzt. Die Angabe eines Bereichs ermöglicht uns auszudrücken, dass ein Prädikat nur für einen eingeschränkten Bereich gültig ist.

Bei der folgenden Definition muss die für $\alpha(x)$ eingesetzte Formel „erkennen lassen“, über welche Subjektvariable quantifiziert wird. Das ist in der Regel darüber zu entscheiden, welche freie Subjektvariable als erstes in der Formel vorkommt.[1] In der exakten Syntax des QEDEQ-Formats[2] ist die Subjektvariable immer angegeben.

Definition 4.5 (Eingeschränkter Allquantor)**.**

$$\forall\; \alpha(x)\; (\beta(x)) \;:\leftrightarrow\; \forall x\; (\phi(x) \;\rightarrow\; \psi(x))$$

Dazu passt die folgende Definition für den eingeschränkten Existenzquantor.[3]

Definition 4.6 (Eingeschränkter Existenz)**.**

$$\exists\; \alpha(x)\; (\beta(x)) \;:\leftrightarrow\; \exists x\; (\alpha(x) \;\wedge\; \beta(x))$$

Für eingeschränkte Quantoren gelten analog zu Proposition 3.4 entsprechende Formeln.
+++

Für die Existenz genau eines Individuums mit einer bestimmten Eigenschaft wird nun ein gesonderter Quantor eingeführt.

Definition 4.7 (Eingeschränkter Existenz für genau ein Individuum)**.**

$$\exists!\; \alpha(x)\; (\beta(x)) \;:\leftrightarrow\; \exists\; \alpha(x)\;\; (\beta(x) \;\wedge\; \forall\; \alpha(y)\;\; (\beta(y) \;\rightarrow\; x \;=\; y))$$

Regel 13 (Termdefinition durch Formel)**.** *Falls die Formel $\exists! x\; \alpha(x)$ gilt, dann kann die Termsyntax durch $D(x, \alpha(x))$ erweitert werden. Die Formel alpha(x) möge die Variable y nicht enthalten und $\beta(y)$ sei eine Formel, welche die Variable x nicht enthält. Dann wird durch $\beta(D(x, \alpha(x)))$ eine Formel definiert durch $\beta(y) \wedge \exists! x\; (\alpha(x) \wedge x = y)$. Auch in der abkürzenden Schreibweise gilt die Subjektvariable x als gebunden, die Subjektvariable y ist mit den obigen Einschränkungen frei wählbar und wird in der Abkürzung nicht weiter beachtet. Veränderungen von α in eine andere Formel α', die eventuell erforderlich sind, damit keine Variablenkollisionen mit Variablen aus β entstehen, müssen jedoch auch in der Abkürzung durchgeführt werden. Alle Termbildungsregeln werden entsprechend erweitert. Der Ausdruck ist auch ersetzbar durch $\exists! y\; (\beta(y) \wedge \alpha(y)$ oder durch $\beta(y) \wedge \alpha(y)$.*

---

[1] Beispielsweise ist in der folgenden Formel erkennbar, dass die zweite Quantifikation über die Subjektvariable m läuft: $\forall\; n \in \mathbb{N}\; \forall\; m \in n\; m < n$.

[2] Siehe unter http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq/.

[3] Passend, da $\neg\forall\;\; \psi(x)\;\; (\phi(x)) \;\leftrightarrow\; \exists\;\; x\;\; \neg(\psi(x) \;\rightarrow\; \phi(x)) \;\leftrightarrow\; \exists\;\; x\;\; (\psi(x) \wedge \neg\phi(x)) \;\leftrightarrow\; \exists\; \psi(x)\; (\neg\phi(x))$.

Literaturverzeichnis

[1] *A.N. Whitehead, B. Russell*, Principia Mathematica, Cambridge University Press, London 1910

[2] *P. Bernays*, Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“, Math. Zeitschr. 25 (1926), 305-320

[3] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Ed., Springer, Berlin 1938. Siehe auch http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/scav/hilbert/hilbert.html 15

[4] *P.S. Novikov*, Grundzüge der mathematischen Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973

[5] *E. Mendelson*, Introduction to Mathematical Logic, 3. ed., Wadsworth, Belmont, CA 1987

[6] *V. Günther*, Vorlesung „Mathematik und Logik“, gehalten an der Universität Hamburg, Wintersemester 1994/1995

[7] *M. Meyling*, Hilbert II, Darstellung von formal korrektem mathematischen Wissen, Grobkonzept, http://www.qedeq.org/current/doc/project/qedeq_basic_concept_de.pdf

[8] qedeq_set_theory_v1 http://qedeq.org/0_03_11/doc/math/qedeq_set_theory_v1.xml