

Anfangsgründe der mathematischen Logik

Michael Meyling

13. Juni 2011

Die Quelle für dieses Dokument ist hier zu finden:

http://www.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_logic_v1.xml

Die vorliegende Publikation ist urheberrechtlich geschützt.

Bei Fragen, Anregungen oder Bitte um Aufnahme in die Liste der abhängigen Module schicken Sie bitte eine EMail an die Adresse mime@qedeq.org

Die Autoren dieses Dokuments sind: Michael Meyling michael@meyling.com

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Zusammenfassung | 5 |
| Vorwort | 7 |
| Einleitung | 9 |
| 1 Sprache | 11 |
| 1.1 Terme und Formeln | 11 |
| 2 Axiome und Schlussregeln | 15 |
| 2.1 Axiome | 15 |
| 2.2 Ableitungsregeln | 16 |
| 3 Abgeleitete Sätze | 19 |
| 3.1 Aussagenlogik | 19 |
| 3.2 Prädikatenlogik | 20 |
| 3.3 Abgeleitete Regeln | 21 |
| 4 Identität | 23 |
| 4.1 Axiome der Identität | 23 |
| 4.2 Eingeschränkte Quantoren | 24 |
| Literaturverzeichnis | 25 |
| Index | 25 |

Zusammenfassung

Das Projekt **Hilbert II** beschäftigt sich mit der formalen Darstellung und Dokumentation von mathematischem Wissen. Dazu stellt **Hilbert II** eine Programmsuite zur Lösung der damit zusammenhängenden Aufgaben bereit. Auch die konkrete Dokumentation mathematischen Grundlagenwissens mit diesen Hilfsmitteln gehört zum Ziel dieses Projekts. Für weitere Informationen über das Projekt **Hilbert II** siehe auch unter <http://www.qedeq.org>.

Dieses Dokument beschreibt die logischen Axiome, Schluss- und Metaregeln mit denen logische Schlüsse durchgeführt werden können.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise und in formaler Form. Dazu wird ein Kalkül angegeben, der es gestattet alle wahren Formeln abzuleiten. Weitere abgeleitete Regeln, Sätze, Definitionen, Abkürzungen und Syntaxerweiterungen entsprechen im Wesentlichen der mathematischen Praxis.

Dieses Dokument liegt auch selbst in einer formalen Sprache vor, der Ursprungstext ist eine XML-Datei, deren Syntax mittels der XSD <http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq.xsd> definiert wird.

Dieses Dokument ist noch sehr in Arbeit und wird von Zeit zu Zeit aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

Vorwort

Das ganze Universum der Mathematik kann mit den Mitteln der Mengenlehre entfaltet werden. Außer den Axiomen der Mengenlehre werden dazu nur noch logische Axiome und Regeln benötigt. Diese elementaren Grundlagen genügen, um die komplexesten mathematischen Strukturen zu definieren und Sätze über solche Strukturen beweisen zu können. Dieses Vorgehen lässt sich vollständig formalisieren und auf die einfache Manipulation von Zeichenketten zurückführen. Die inhaltliche Deutung der Zeichenfolgen stellt dann das mathematische Universum dar.

Dabei ist es natürlich mehr als nur bequem, Abkürzungen einzuführen und weitere abgeleitete Regeln zu verwenden. Diese Bequemlichkeiten können aber jederzeit¹ eliminiert und durch die grundlegenden Begrifflichkeiten ersetzt werden.

Dieses Projekt entspringt meinem Kindheitstraum eine solche Formalisierung konkret vorzunehmen. Inzwischen sind die technischen Möglichkeiten so weit entwickelt, dass eine Realisierung möglich erscheint.

Dank gebührt den Professoren *W. Kerby* und *V. Günther* der Hamburger Universität für ihre inspirierenden Vorlesungen zu den Themen Logik und Axiomatische Mengenlehre. Ohne diese entscheidenden Impulse hätte es dieses Projekt nie gegeben.

Besonderer Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit – wobei der Verständnisgrad unseres Kleinkinds vielleicht noch nicht so stark ausgeprägt ist.

Hamburg, Dezember 2010

Michael Meyling

¹Zumindest ist eine solche Rückführung theoretisch immer möglich. Praktisch kann sie jedoch an der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Zeit und des nutzbaren Raums scheitern. So wird es sicherlich nicht möglich sein, die natürliche Zahl 1.000.000.000 in Mengenschreibweise anzugeben.

Einleitung

An den Anfang sei ein Zitat aus einem von *D. Hilbert* im September 1922 gehaltenen Vortrag² mit dem programmatischen Titel „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ gesetzt.

„Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:

Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ (\rightarrow) und für „nicht“ (\neg) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist die Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \\ \hline B \end{array}$$

wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln A und $A \rightarrow B$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel B eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“

Am Anfang steht die Logik. Sie stellt das Rüstzeug zur Argumentation bereit. Sie hilft beim Gewinnen von neuen Aussagen aus bereits vorhandenen. Sie ist universell anwendbar.

In dem 1928 erschienenen Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* formulierten *D. Hilbert* und *W. Ackermann* ein axiomatisches System der Aussagenlogik, welches die Basis für das hier verwendete bildet. Durch das von *P. S. Novikov* 1959 angegebene Axiomensystem und Regelwerk der Prädikatenlogik wird das System verfeinert.

In diesem Text wird ein Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität und Funktoren vorgestellt, der die Grundlagen für die Entwicklung der mathematischen Theorie schafft. Es werden im Folgenden nur die Ergebnisse ohne weitere Beweise und in knapper Form präsentiert.³

²Vortrag, gehalten in der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft. September 1922.

³Die Beweise werden zu einem späteren Zeitpunkt ergänzt.

Kapitel 1

Sprache

Um mathematische Aussagen präzise formulieren zu können, wird in diesem Kapitel eine formale Sprache definiert. Obgleich dieses Dokument mathematischen Inhalt sehr formal beschreibt, reicht es nicht aus um als Definition für ein computerlesbares Dokumentformat zu dienen. Daher muss eine solche extensive Spezifikation an anderer Stelle erfolgen. Das dafür ausgewählte Format ist die *Extensible Markup Language* abgekürzt *XML*. XML beschreibt eine Menge von Regeln für den Aufbau elektronischer Dokumente.¹ Die daran ausgerichtete formale Syntaxspezifikation kann hier gelesen werden: <http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq.xsd>. Damit wird ein mathematisches Dokumentenformat festgelegt, das die Erzeugung von L^AT_EX-Büchern und eine automatische Beweisüberprüfung ermöglicht. Weitere Syntaxbeschränkungen und einige Erklärungen werden beschrieben in http://www.qedeq.org/current/doc/project/qedeq_logic_language_en.pdf.

Auch dieses Dokument ist eine (oder wurde erzeugt aus einer) XML-Datei, die hier zu finden ist http://www.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_logic_v1.xml. Aber nun folgen wir einfach dem traditionellen mathematischen Weg, die Anfangsgänge der mathematischen Logik vorzustellen.

1.1 Terme und Formeln

Als Symbole kommen die *logischen Symbole* $L = \{ \neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow, \forall, \exists \}$, die *Prädikatenkonstanten* $C = \{ c_i^k \mid i, k \in \omega \}$, die *Funktionsvariablen*² $F = \{ f_i^k \mid i, k \in \omega \wedge k > 0 \}$, die *Funktionskonstanten*³ $H = \{ h_i^k \mid i, k \in \omega \}$, die *Subjektvariablen* $V = \{ v_i \mid i \in \omega \}$, sowie die *Prädikatenvariablen* $P = \{ p_i^k \mid i, k \in \omega \}$ vor.⁴ Unter der *Stellenzahl* eines Operators wird der obere Index verstanden. Die Menge der nullstelligen Prädikatenvariablen wird auch als Menge der *Aussagenvariablen* bezeichnet: $A := \{ p_i^0 \mid i \in \omega \}$. Für die Subjektvariablen werden abkürzend auch bestimmte Kleinbuchstaben geschrieben. Die Kleinbuchstaben stehen für verschiedene Subjektvariablen: $v_1 = 'u'$, $v_2 = 'v'$,

¹Siehe <http://www.w3.org/XML/> für weitere Informationen.

²Funktionsvariablen dienen der einfacheren Notation und werden beispielsweise zur Formulierung eines identitätslogischen Satzes benötigt: $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$. Ausserdem bereitet ihre Einführung die spätere Syntaxerweiterung zur Anwendung von funktionalen Klassen vor.

³Funktionskonstanten dienen ebenfalls der Bequemlichkeit und werden später für direkt definierte Klassenfunktionen verwendet. So zum Beispiel zur Potenzklassenbildung, zur Vereinigungsklassenbildung und für die Nachfolgerfunktion. All diese Funktionskonstanten können auch als Abkürzungen verstanden werden.

⁴Unter ω werden die natürlichen Zahlen, die Null eingeschlossen, verstanden. Alle bei den Mengenbildungen beteiligten Symbole werden als paarweise verschieden vorausgesetzt. Das bedeutet z. B.: $f_i^k = f_{i'}^{k'} \rightarrow (k = k' \wedge i = i')$ und $h_i^k \neq v_j$.

$v_3 = 'w', v_4 = 'x', v_5 = 'y', v_5 = 'z'$. Weiter werden als Abkürzungen verwendet: für die Prädikatenvariablen $p_1^n = '\phi'$ und $p_2^n = '\psi'$, wobei die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird, für die Aussagenvariablen $a_1 = 'A', a_2 = 'B'$ und $a_3 = 'C'$. Als Abkürzungen für Funktionsvariablen wird festgelegt $f_1^n = 'f'$ und $f_2^n = 'g'$, wobei wiederum die jeweilige Stellenanzahl n aus der Anzahl der nachfolgenden Parameter ermittelt wird. Bei allen aussagenlogischen zweistelligen Operatoren wird der leichten Lesbarkeit wegen die Infixschreibweise benutzt, dabei werden die Symbole '(' und ')' verwandt. D. h. für den Operator \wedge mit den Argumenten A und B wird $(A \wedge B)$ geschrieben. Es gelten die üblichen Operatorprioritäten und die dazugehörigen Klammerregeln. Insbesondere die äußeren Klammern werden in der Regel weggelassen. Auch werden leere Klammern nicht geschrieben.

Nachfolgend werden die Operatoren mit absteigender Priorität aufgelistet.

$$\begin{array}{c} \neg, \forall, \exists \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow, \leftrightarrow \end{array}$$

Der Begriff *Term* wird im Folgenden rekursiv definiert:

1. Jede Subjektvariable ist ein Term.
2. Seien $i, k \in \omega$ und t_1, \dots, t_k Terme. Dann ist auch $h_i^k(t_1, \dots, t_k)$ und falls $k > 0$, so auch $f_i^k(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Alle nullstelligen Funktionskonstanten $\{h_i^0 \mid i, \in \omega\}$ sind demzufolge Terme, sie werden auch *Individuenkonstanten* genannt.⁵

Die Begriffe *Formel*, *freie* und *gebundene* Subjektvariable werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel, solche Formeln enthalten keine freien oder gebundenen Subjektvariablen.
2. Ist p^k eine k -stellige Prädikatenvariable und c^k eine k -stellige Prädikatenkonstante und sind t_1, t_2, \dots, t_k Terme, so sind $p^k(t_1, t_2, \dots, t_k)$ und $c^k(t_1, t_2, \dots, t_k)$ Formeln. Dabei gelten alle in t_1, t_2, \dots, t_k vorkommenden Subjektvariablen als freie Subjektvariablen, gebundene Subjektvariablen kommen nicht vor.⁶
3. Es seien α, β Formeln, in denen keine Subjektvariablen vorkommen, die in einer Formel gebunden und in der anderen frei sind. Dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln. Subjektvariablen, welche in α oder β frei (bzw. gebunden) vorkommen, bleiben frei (bzw. gebunden).
4. Falls in der Formel α die Subjektvariable x_1 nicht gebunden vorkommt⁷, dann sind auch $\forall x_1 \alpha$ und $\exists x_1 \alpha$ Formeln. Dabei wird \forall als *Allquantor* und \exists als *Existenzquantor* bezeichnet. Bis auf x_1 bleiben alle freien Subjektvariablen von α auch frei, und zu den gebundenen Subjektvariablen von α kommt x_1 hinzu.

⁵Analog dazu könnten Subjektvariablen auch als nullstellige Funktionsvariablen definiert werden. Da die Subjektvariablen jedoch eine hervorgehobene Rolle spielen, werden sie auch gesondert bezeichnet.

⁶Dieser zweite Punkt umfasst den ersten, welcher nur der Anschaulichkeit wegen extra aufgeführt ist.

⁷D. h. x_1 kommt höchstens frei vor.

Alle Formeln die nur durch Anwendung von 1. und 3. gebildet werden, heißen Formeln der *Aussagenalgebra*.

Es gilt für jede Formel α : die Menge der freien und der gebundenen Subjektvariablen von α sind disjunkt.⁸

Falls eine Formel die Gestalt $\forall x_1 \alpha$ bzw. $\exists x_1 \alpha$ besitzt, dann heißt die Formel α der *Wirkungsbereich* des Quantors \forall bzw. \exists .

Alle Formeln, die beim Aufbau einer Formel mittels 1. bis 4. benötigt werden, heißen *Teilformeln*.

⁸Andere Formalisierungen erlauben z. B. $\forall x_1 \alpha$ auch dann, wenn x_1 schon in α gebunden vorkommt. Auch Ausdrücke wie $\alpha(x_1) \wedge (\forall x_1 \beta)$ sind erlaubt. Es wird dann für ein einzelnes Vorkommen einer Variablen definiert, ob es sich um ein freies oder gebundenes Vorkommen handelt.

Kapitel 2

Axiome und Schlussregeln

Nun geben wir das Axiomensystem für die Prädikatenlogik an und formulieren die Regeln um daraus neue Formeln zu gewinnen.

2.1 Axiome

Die Grundlagen der bei **Hilbert II** verwendeten Logik werden hier zusammengestellt. Die folgende Kalkülsprache und ihre Axiome basieren auf den Formulierungen von *D. Hilbert*, *W. Ackermann*[3], *P. Bernays* und *P. S. Novikov*[4]. Aus den hier angegebenen logischen Axiomen und den elementaren Schlussregeln können weitere Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Erst diese neuen Metaregeln führen zu einer komfortablen logischen Argumentation.

Die Axiome, Definitionen und Regeln werden in syntaktischer Weise vorgestellt, aber um die gewählte Form zu motivieren, geben wir bereits einige semantische *Interpretationen*.

Die aussagenlogischen Operatoren ‘ \neg ’, ‘ \vee ’, ‘ \wedge ’, ‘ \rightarrow ’ und ‘ \leftrightarrow ’ verknüpfen beliebige *Aussagen* zu neuen Aussagen. Dabei verstehen wir unter einer Aussage eine Größe, die nur den Wert „wahr“ und „falsch“ annehmen kann.¹

Der zweistellige Operator ‘ \vee ’ (Oder-Verknüpfung) legt für die Aussagen α und β die neue Aussage $\alpha \vee \beta$ fest. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn wenigstens eine der ursprünglichen Aussagen wahr ist.

Durch den einstelligen Operator ‘ \neg ’ wird zu einer Aussage α ihre *Negation* definiert. $\neg\alpha$ ist falsch, wenn α wahr ist und wahr wenn α falsch ist.

Die Implikation, die Und-Verknüpfung und die logische Äquivalenz werden als Abkürzungen definiert.²

Die logische Implikation („wenn ... dann,“) kann wie folgt definiert werden.

$$\alpha \rightarrow \beta \text{ :}\leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$$

Definition der Und-Verknüpfung mittels De-Morgan.

$$\alpha \wedge \beta \text{ :}\leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

Die logische Äquivalenz („genau dann, wenn“) wird wie üblich definiert.

$$\alpha \leftrightarrow \beta \text{ :}\leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

¹Später werden wir für die Wahrheitswerte die Symbole \top und \perp definieren.

²Eigentlich werden die Abkürzungssymbole \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow erst an dieser Stelle definiert und erweitern die Sprachsyntax. Aus Bequemlichkeitsgründen wurden diese Symbole bereits als logische Symbole angegeben.

Nun folgt unser erstes Axiom der Aussagenlogik. Mithilfe dieses Axioms können überflüssige Oder-Verknüpfungen entfernt werden.

Axiom 1 (Oder-Kürzung). [axiom:disjunction_idempotence]

$$(A \vee A) \rightarrow A$$

Wenn eine Aussage wahr ist, dann kann eine beliebige weitere Aussage mittels Oder-Verknüpfung hinzugefügt werden, ohne dass die Aussage falsch wird.

Axiom 2 (Oder-Verdünnung). [axiom:disjunction_weakening]

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

Die Oder-Verknüpfung soll kommutativ sein.

Axiom 3 (Oder-Vertauschung). [axiom:disjunction_commutative]

$$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$$

Eine Oder-Verknüpfung kann auf beiden Seiten einer Implikation hinzugefügt werden.

Axiom 4 (Oder-Vorsehung). [axiom:disjunction_addition]

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$$

Wenn ein Prädikat auf alle x zutrifft, so trifft es auch auf ein beliebiges y zu.

Axiom 5 (Spezialisierung). [axiom:universalInstantiation]

$$\forall x \phi(x) \rightarrow \phi(y)$$

Wenn ein Prädikat auf irgend ein y zutrifft, so gibt es ein x , auf das es zutrifft.

Axiom 6 (Existenz). [axiom:existencialGeneralization]

$$\phi(y) \rightarrow \exists x \phi(x)$$

2.2 Ableitungsregeln

Die im folgenden angegebenen Regeln ermöglichen uns aus den wahr angesehenen Axiomen neue wahre Formeln zu gewinnen. Aus diesen können wiederum weitere Formeln abgeleitet werden, so dass sich die Menge der wahren Formeln sukzessive erweitern lässt.

Regel 1 (Abtrennung, Modus Ponens). [rule:modusPonens] *Wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ wahre Formeln sind, dann ist auch β eine wahre Formel.*

Regel 2 (Ersetzung für freie Subjektvariable). [rule:replaceFree] *Ausgehend von einer wahren Formel kann jede freie Subjektvariable durch einen Term ersetzt werden, der keine in der Formel bereits gebundenen Subjektvariablen enthält. Die Ersetzung muss durchgängig in der gesamten Formel erfolgen.*

Das Verbot in dem Term Subjektvariablen zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommen, dient nicht nur der Absicherung der Wohlgeformtheit, sondern besitzt auch eine inhaltliche Bedeutung. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$$\begin{array}{ll} \forall x \exists y \phi(x, y) & \rightarrow \exists y \phi(z, y) \quad \text{mit Axiom 5} \\ \forall x \exists y \phi(x, y) & \rightarrow \exists y \phi(y, y) \quad \text{verbotene Ersetzung: } z \text{ durch } y, \text{ obwohl } y \\ & \text{bereits gebunden} \\ \forall x \exists y x \neq y & \rightarrow \exists y \neq y \quad \text{Einsetzung von } \neq \text{ f\u00fcr } \phi \end{array}$$

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht g\u00fcltig.

Regel 3 (Umbenennung f\u00fcr gebundene Subjektvariable). [rule:renameBound] *Jede gebundene Subjektvariable kann in eine andere, nicht bereits frei vorkommende, Subjektvariable umbenannt werden. Falls \u00fcber umzubennende Variable mehrfach quantifiziert wird, dann braucht die Umbenennung nur im Wirkungsbereich eines bestimmten Quantors zu erfolgen.*

Regel 4 (Einsetzung f\u00fcr Pr\u00e4dikatenvariable). [rule:replacePred] *Es sei α eine wahre Formel, die die n -stellige Pr\u00e4dikatenvariable p enth\u00e4lt, x_1, \dots, x_n seien paarweise verschiedene Subjektvariable und $\beta(x_1, \dots, x_n)$ eine beliebige Formel in der die Variablen x_1, \dots, x_n nicht gebunden sind. In der Formel $\beta(x_1, \dots, x_n)$ m\u00fcssen jedoch nicht alle x_1, \dots, x_n als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin k\u00f6nnen auch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erf\u00fcllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $p(t_1, \dots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen t_1, \dots, t_n in α durch $\beta(t_1, \dots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- die freien Variablen von $\beta(x_1, \dots, x_n)$ ohne x_1, \dots, x_n kommen nicht in α als gebundene Variablen vor
- jedes Vorkommen von $p(t_1, \dots, t_n)$ in α enth\u00e4lt keine gebundene Variable von $\beta(x_1, \dots, x_n)$
- das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel

Siehe III §5 in [3].

Das Verbot in der Ersetzungsformel keine zus\u00e4tzliche Subjektvariable zu verwenden, welche in der Originalformel gebunden vorkommt, hat nicht nur die Absicherung der Wohlgeformtheit zum Zweck. Es bewahrt auch die inhaltliche G\u00fcltigkeit. Dazu betrachten wir die folgende Ableitung.

$$\begin{array}{ll} \phi(x) & \rightarrow \exists y \phi(y) \quad \text{mit Axiom 6} \\ (\exists y y = y) \wedge \phi(x) & \rightarrow \exists y \phi(y) \\ \exists y (y = y \wedge \phi(x)) & \rightarrow \exists y \phi(y) \\ \exists y (y = y \wedge x \neq y) & \rightarrow \exists y y \neq y \quad \text{verbotene Ersetzung: } \phi(x) \text{ durch } x \neq \\ & y, \text{ obwohl } y \text{ bereits gebunden} \\ \exists y x \neq y & \rightarrow \exists y y \neq y \end{array}$$

Diese letzte Aussage ist in vielen Modellen nicht g\u00fcltig.

Analog zu Regel [Regel 4](#) k\u00f6nnen wir auch Funktionsvariablen ersetzen.

Regel 5 (Einsetzung f\u00fcr Funktionsvariable). [rule:replaceFunct] *Es sei α eine bereits bewiesene Formel, die die n -stellige Funktionsvariable σ enth\u00e4lt, x_1, \dots, x_n seien paarweise verschiedene Subjektvariable und $\tau(x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger Term in dem die Subjektvariablen x_1, \dots, x_n nicht gebunden sind. In dem Term $\tau(x_1, \dots, x_n)$ m\u00fcssen nicht alle x_1, \dots, x_n als freie Subjektvariable vorkommen. Weiterhin k\u00f6nnen auch noch weitere Variable frei oder gebunden vorkommen.*

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann kann durch die Ersetzung jedes Vorkommens von $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ mit jeweils passenden Termen t_1, \dots, t_n in α durch $\tau(t_1, \dots, t_n)$ eine weitere wahre Formel gewonnen werden.

- die freien Variablen von $\tau(x_1, \dots, x_n)$ ohne x_1, \dots, x_n kommen in α nicht als gebundene Variablen vor
- jedes Vorkommen von $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ in α enthält keine gebundene Variable von $\tau(x_1, \dots, x_n)$
- das Ergebnis der Substitution ist eine wohlgeformte Formel

Regel 6 (Hintere Generalisierung). [rule:universalGeneralization] Wenn $\alpha \rightarrow \beta(x_1)$ eine wahre Formel ist und α die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $\alpha \rightarrow (\forall x_1 (\beta(x_1)))$ eine wahre Formel.

Regel 7 (Vordere Partikularisierung). [rule:existentialGeneralization] Wenn $\alpha(x_1) \rightarrow \beta$ eine wahre Formel ist und β die Subjektvariable x_1 nicht enthält, dann ist auch $(\exists x_1 \alpha(x_1)) \rightarrow \beta$ eine wahre Formel.

Die Auflösung und der Einsatz von Abkürzungen und Konstanten ist auch mit der Anwendung von Regeln verbunden. In vielen Texten zur mathematischen Logik werden diese Regeln nicht explizit formuliert, auch dieser Text geht darauf nicht weiter ein. In dem exakten QEDEQ-Format gibt es jedoch entsprechende Regeln.

Kapitel 3

Abgeleitete Sätze

Mit den im Kapitel 2 angegebenen Axiomen und Schlussregeln lassen sich elementare logische Gesetzmäßigkeiten ableiten.

3.1 Aussagenlogik

Zunächst behandeln wir die Aussagenlogik.

Um das Prädikat *wahr* zu definieren, kombinieren wir einfach ein Prädikat und seine Negation.

Definition 1 (Wahr). [definition:True]

$$\top \leftrightarrow (A \vee \neg A)$$

Für eine exakte Definition hätten wir eigentlich so etwas wie $p_0^0 = \top$ und $\top := \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$ schreiben müssen.¹ In Zukunft schreiben wir jedoch nur das Symbol. Die Stellenzahl sollte aus der Formel ersichtlich sein.

Für das Prädikat *falsch* negieren wir einfach *wahr*.²

Definition 2 (Falsch). [definition:False]

$$\perp \leftrightarrow \neg \top$$

Wir haben die folgenden elementaren Aussagen.

Proposition 1 (Elementare Sätze). [theorem:propositionalCalculus]

$$\begin{array}{ll} \top & \text{(aa)} \\ \neg \perp & \text{(ab)} \\ A \rightarrow A & \text{(ac)} \\ A \leftrightarrow A & \text{(ad)} \\ (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A) & \text{(ae)} \\ (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A) & \text{(af)} \\ (A \wedge B) \rightarrow A & \text{(ag)} \\ (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A) & \text{(ah)} \\ (A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C) & \text{(ai)} \end{array}$$

¹In der noch tiefer liegenden formalen Sprache (siehe http://www.qedeq.org/current/doc/project/qedeq_logic_language_en.pdf) hat dieses Prädikat den Namen *TRUE* und besitzt keine Argumente. Daher müssten wir nur die Namen auf die natürlichen Zahlen abbilden um der exakten Definition gerecht zu werden.

²Analog zu der vorhergehenden Definition können wir festlegen $p_1^0 = \perp$.

| | |
|---|------|
| $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ | (aj) |
| $A \leftrightarrow (A \vee A)$ | (ak) |
| $A \leftrightarrow (A \wedge A)$ | (al) |
| $A \leftrightarrow \neg\neg A$ | (am) |
| $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | (an) |
| $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$ | (ao) |
| $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ | (ap) |
| $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | (aq) |
| $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ | (ar) |
| $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ | (as) |
| $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ | (at) |
| $(A \wedge \top) \leftrightarrow A$ | (au) |
| $(A \wedge \perp) \leftrightarrow \perp$ | (av) |
| $(A \vee \top) \leftrightarrow \top$ | (aw) |
| $(A \vee \perp) \leftrightarrow A$ | (ax) |
| $(A \vee \neg A) \leftrightarrow \top$ | (ay) |
| $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \perp$ | (az) |
| $(\top \rightarrow A) \leftrightarrow A$ | (ba) |
| $(\perp \rightarrow A) \leftrightarrow \top$ | (bb) |
| $(A \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg A$ | (bc) |
| $(A \rightarrow \top) \leftrightarrow \top$ | (bd) |
| $(A \leftrightarrow \top) \leftrightarrow A$ | (be) |
| $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ | (bf) |
| $((A \leftrightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow B)) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | (bg) |
| $((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C))$ | (bh) |
| $((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)) \leftrightarrow \neg A$ | (bi) |
| $(A \leftrightarrow (A \wedge B)) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ | (bj) |
| $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$ | (bk) |
| $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$ | (bl) |
| $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ | (bm) |
| $(A \wedge (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$ | (bn) |

3.2 Prädikatenlogik

Für die Prädikatenlogik ergeben sich die folgenden Sätze.

Wir haben die folgenden elementaren Aussagen.

Proposition 2 (Elementare Sätze). [theorem:predicateCalculus]

| | |
|---|-----|
| $\forall x (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \phi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))$ | (a) |
| $\forall x (\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists x \phi(x) \rightarrow \exists x \psi(x))$ | (b) |
| $\forall x (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \phi(x) \leftrightarrow \forall x \psi(x))$ | (c) |
| $\exists x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (\exists x \phi(x) \wedge \exists x \psi(x))$ | (d) |
| $(\forall x \psi(x) \vee \forall x \psi(x)) \rightarrow \forall x (\phi(x) \vee \psi(x))$ | (e) |
| $\exists x (\phi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x \phi(x) \vee \exists x \psi(x))$ | (f) |
| $\forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x))$ | (g) |
| $\forall x \forall y \phi(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x \phi(x, y)$ | (h) |
| $\exists x \exists y \phi(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \phi(x, y)$ | (i) |
| $\forall x (\phi(x) \rightarrow A) \rightarrow (\forall x \phi(x) \rightarrow A)$ | (j) |
| $\forall x (A \rightarrow \phi(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x \phi(x))$ | (k) |
| $\forall x (\phi(x) \wedge A) \leftrightarrow (\forall x \phi(x) \wedge A)$ | (l) |
| $\forall x (\phi(x) \vee A) \leftrightarrow (\forall x \phi(x) \vee A)$ | (m) |
| $\forall x (\phi(x) \leftrightarrow A) \rightarrow (\forall x \phi(x) \leftrightarrow A)$ | (n) |
| $\forall x (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \phi(x) \leftrightarrow \forall x \psi(x))$ | (o) |

3.3 Abgeleitete Regeln

Aus den logischen Grundlagen lassen sich logische Sätze und Metaregeln ableiten, die eine bequemere Argumentation ermöglichen. Erst mit diesem Regelwerk und zusätzlichen Definitionen und Abkürzungen wird die restliche Mathematik entwickelt. Dabei wird stets nur eine *konservative* Erweiterung der bisherigen Syntax vorgenommen. D. h. in dem erweiterten System lassen sich keine Formeln ableiten, die in der alten Syntax formuliert, aber dort nicht ableitbar sind. Im Folgenden werden solche konservativen Erweiterungen vorgestellt.

Regel 8 (Ersetzung durch logisch äquivalente Formeln). [rule:replaceEquiFormula] *Sei die Aussage $\alpha \leftrightarrow \beta$ bereits bewiesen. Wird dann aus der Formel δ eine neue Formel γ dadurch gewonnen, dass ein beliebiges Vorkommen von α durch β ersetzt³ wird und besitzt γ zumindest die freien Variablen von δ , dann gilt $\delta \leftrightarrow \gamma$.*

Regel 9 (Ersetzung von \top durch bereits abgeleitete Formel). [rule:replaceTrueByTrueFormula] *Sei α eine bereits abgeleitete wahre Formel und β eine Formel, die \top enthält. Falls wir durch Ersetzung eines beliebigen Vorkommens von \top in β durch α eine wohlgeformte Formel γ erhalten, dann ist die folgende Formel ebenfalls wahr: $\beta \leftrightarrow \gamma$*

Regel 10 (Ersetzung von bereits abgeleiteter Formel durch \top). [rule:replaceTrueFormulaByTrue] *Sei α eine bereits abgeleitete wahre Formel und β eine Formel, die α enthält. Falls wir durch Ersetzung eines beliebigen Vorkommens von α in β durch \top eine wohlgeformte Formel γ erhalten, dann ist die folgende Formel ebenfalls wahr: $\beta \leftrightarrow \gamma$*

Regel 11 (Abgeleitete Quantifizierung). [rule:derivedQuantification] *Falls wir die wahre Formel $\alpha(x)$ bereits abgeleitet haben und x in $\alpha(x)$ nicht gebunden vorkommt, dann ist die Formel $\forall x \alpha(x)$ ebenfalls wahr.*

Regel 12 (Allgemeine Assoziativität). [rule:generalAssociativity] *Falls ein zweistelliger Operator das Assoziativitätsgesetz erfüllt, so erfüllt er auch das allgemeine Assoziativitätsgesetz. Dem Operator kann dann eine beliebige Stellenanzahl größer eins zugeschrieben werden. So wird beispielsweise anstelle für $(a + b) + (c + d)$ einfach $a + b + c + d$ geschrieben.⁴*

Regel 13 (Allgemeine Kommutativität). [rule:generalCommutativity] *Falls ein Operator das allgemeine Assoziativitätsgesetz erfüllt und kommutativ ist, so sind alle Permutationen von Parameterreihenfolgen einander gleich oder äquivalent.⁵ So gilt beispielsweise $a + b + c + d = c + a + d + b$.*

Regel 14 (Ableitbarkeit aus einer Formel). [rule:definitionDeductionFromFormula] *Eine Formel β heißt aus der Formel α ableitbar, wenn sich β mit Hilfe aller Regeln des Prädikatenkalküls und der um α vermehrten Gesamtheit aller wahren Formeln des Prädikatenkalküls herleitbar und $\alpha \rightarrow \beta$ eine Formel ist. Dabei dürfen die beiden Quantifizierungsregeln, die Einsetzungsregel für Prädikatenvariable und die Umbenennungsregel für freie Subjektvariable nur auf solche Variablen angewendet werden, die in der Formel α nicht auftreten.*

Schreibweise: $\alpha \vdash \beta$.

Die Ableitbarkeit einer Formel β aus der Formel α ist streng zu unterscheiden von der Ableitbarkeit einer wahren Formel aus den Axiomen des Kalküls, denn im zweiten Fall stehen mehr Ableitungsregeln zur Verfügung. Falls beispielsweise

³Bei dieser Ersetzung kann es erforderlich sein, dass gebundene Variablen von β umbenannt werden müssen, damit sich wieder eine Formel ergibt.

⁴Der n -stellig Operator wird mit einer bestimmten Klammerung definiert, jede andere Klammerreihenfolge liefert jedoch dasselbe Ergebnis.

⁵Je nachdem ob es sich um einen Termoperator oder einen Formeloperator handelt.

die Formel A als Axiom aufgenommen wird, so ist die Formel A herleitbar. Hingegen läßt sich aus A nicht B ableiten.⁶

Regel 15 (Deduktionstheorem). [rule:deductionTheorem] *Wenn eine Formel β aus einer Formel α ableitbar ist, so ist die Formel $\alpha \rightarrow \beta$ im Prädikatenkalkül herleitbar.*

⁶Die Unterscheidung ist der möglichen Anwendung der verschiedenen Substitutionsregeln geschuldet.

Kapitel 4

Identität

Alles was existiert besitzt eine spezifische Natur. Jede Entität existiert als etwas besonderes und besitzt charakterisierende Merkmale. Identität ist etwas, das eine Entität definierbar und erkennbar macht im Sinne einer Menge von Eigenschaften oder Merkmalen, welche sie von anderen Entitäten unterscheiden. Eine Entität kann mehrere Merkmale besitzen, aber alle Merkmale die sie besitzt ist Teil ihrer Identität.

4.1 Axiome der Identität

Wir starten mit den Identitätsaxiomen.

Es wird eine zweistellige Prädikatskonstante festgelegt, welche in der Interpretation die Identität von Subjekten ausdrücken soll.

Initiale Definition 3 (Identität). [definition:identity]

$$x = y$$

Aus Bequemlichkeit definieren wir auch die Negation der Identitätskonstante.

Definition 4 (Verschiedenheit). [definition:notEqual]

$$x \neq y \leftrightarrow \neg x = y$$

Axiom 7 (Reflexivität der Identität). [axiom:identityIsReflexive]

$$x = x$$

Axiom 8 (Leibnizsche Ersetzbarkeit). [axiom:leibnizReplacement]

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$$

Axiom 9 (Symmetrie der Identität). [axiom:symmetryOfIdentity]

$$x = y \rightarrow y = x$$

Axiom 10 (Transitivität der Identität). [axiom:transitivityOfIdentity]

$$(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$$

Bei der Leibnizschen Ersetzbarkeit können wir die zweite Implikation umkehren.

Proposition 3. [theorem:leibnizEquivalence]

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))$$

Proposition 4. [theorem:identityImpliesFunctionalEquality]

$$x = y \rightarrow f(x) = f(y)$$

4.2 Eingeschränkte Quantoren

Jede Quantifizierung benötigt eine Subjektvariable und einen Bereich über den die Quantifizierung läuft. Bis jetzt haben wir einen festen Bereich für jede Quantifizierung vorausgesetzt. Die Angabe eines Bereichs ermöglicht uns auszudrücken, dass ein Prädikat nur für einen eingeschränkten Bereich gültig ist.

Bei der folgenden Definition muss die für $\alpha(x)$ eingesetzte Formel „erkennen lassen“, über welche Subjektvariable quantifiziert wird. Das ist in der Regel darüber zu entscheiden, welche freie Subjektvariable als erstes in der Formel vorkommt.¹ In der exakten Syntax des QEDeq-Formats² ist die Subjektvariable immer angegeben.

Axiom 11 (Eingeschränkter Allquantor). [axiom:restrictedUniversalQuantifier]

$$\forall \alpha(x) \beta(x) \leftrightarrow \forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

Dazu passt die folgende Definition für den eingeschränkten Existenzquantor.³

Axiom 12 (Eingeschränkter Existenz). [axiom:restrictedExistentialQuantifier]

$$\exists \alpha(x) \beta(x) \leftrightarrow \exists x (\alpha(x) \wedge \beta(x))$$

Für eingeschränkte Quantoren gelten analog zu Proposition [Proposition 2](#) entsprechende Formeln.

+++

Für die Existenz genau eines Individuums mit einer bestimmten Eigenschaft wird nun ein gesonderter Quantor eingeführt.

Axiom 13 (Eingeschränkter Existenz für genau ein Individuum).

[axiom:restrictedUniquenessQuantifier]

$$\exists! \alpha(x) \beta(x) \leftrightarrow \exists \alpha(x) (\beta(x) \wedge \forall \alpha(y) (\beta(y) \rightarrow x = y))$$

Regel 16 (Termdefinition durch Formel). *Falls die Formel $\exists!x \alpha(x)$ gilt, dann kann die Termsyntax durch $D(x, \alpha(x))$ erweitert werden. Die Formel $\alpha(x)$ möge die Variable y nicht enthalten und $\beta(y)$ sei eine Formel, welche die Variable x nicht enthält. Dann wird durch $\beta(D(x, \alpha(x)))$ eine Formel definiert durch $\beta(y) \wedge \exists!x (\alpha(x) \wedge x = y)$. Auch in der abkürzenden Schreibweise gilt die Subjektvariable x als gebunden, die Subjektvariable y ist mit den obigen Einschränkungen frei wählbar und wird in der Abkürzung nicht weiter beachtet. Veränderungen von α in eine andere Formel α' , die eventuell erforderlich sind, damit keine Variablenkollisionen mit Variablen aus β entstehen, müssen jedoch auch in der Abkürzung durchgeführt werden. Alle Termbildungsregeln werden entsprechend erweitert. Der Ausdruck ist auch ersetzbar durch $\exists!y (\beta(y) \wedge \alpha(y))$ oder durch $\beta(y) \wedge \alpha(y)$.*

¹Beispielsweise ist in der folgenden Formel erkennbar, dass die zweite Quantifikation über die Subjektvariable m läuft: $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in n \ m < n$.

²Siehe wieder unter <http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq/>.

³Passend, da $\neg \forall \psi(x) (\phi(x)) \leftrightarrow \exists x \neg(\psi(x) \rightarrow \phi(x)) \leftrightarrow \exists x (\psi(x) \wedge \neg\phi(x)) \leftrightarrow \exists \psi(x) (\neg\phi(x))$.

Literaturverzeichnis

- [1] *A.N. Whitehead, B. Russell*, Principia Mathematica, Cambridge University Press, London 1910
- [2] *P. Bernays*, Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der „Principia Mathematica“, Math. Zeitschr. 25 (1926), 305-320
- [3] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Ed., Springer, Berlin 1938. Siehe auch <http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/scav/hilbert/hilbert.html> 15, 17
- [4] *P.S. Novikov*, Grundzüge der mathematischen Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 15
- [5] *E. Mendelson*, Introduction to Mathematical Logic, 3. ed., Wadsworth, Belmont, CA 1987
- [6] *V. Günther*, Vorlesung „Mathematik und Logik“, gehalten an der Universität Hamburg, Wintersemester 1994/1995
- [7] *M. Meyling*, Hilbert II, Darstellung von formal korrektem mathematischen Wissen, Grobkonzept, http://www.qedeq.org/current/doc/project/qedeq_basic_concept_de.pdf
- [8] qedeq_set_theory_v1 http://www.qedeq.org/0_04_03/doc/math/qedeq_set_theory_v1.xml

Index

- ableitbar, 21
- Abtrennungsregel, 16
- Allquantor, 12
 - eingeschränkter, 24
- Aussagenvariable, 12
- Axiom
 - der Existenz, 16
 - der Oder-Kürzung, 16
 - der Oder-Verdünnung, 16
 - der Oder-Vertauschung, 16
 - der Oder-Vorsehung, 16
 - der Spezialisierung, 16
- Axiome
 - der Prädikatenlogik, 15
- Deduktionstheorem, 22
- Definition
 - der Identität, 23
 - der Verschiedenheit, 23
- Existenzquantor, 12
 - eingeschränkter, 24
 - eingeschränkter für ein Individuum, 24
- falsch, 19
- Formel, 11, 12
- freie Subjektvariable, 12
- Funktionskonstanten, 11
- Funktionsvariablen, 11
- gebundene Subjektvariable, 12
- Generalisierung
 - hintere, 18
- Identität, 23
 - Reflexivität der, 23
 - Symmetrie der, 23
 - Transitivität der, 23
- Individuenkonstante, 12
- konservativ, 21
- Konstante
 - Funktions-, 11
 - Individuen-, 12
 - Prädikaten-, 11
- Leibnizsche Ersetzbarkeit, 23
- Modus Ponens, 16
- Partikularisierung
 - vordere, 18
- Prädikatenkonstante, 11
- Prädikatenlogik
 - Axiome der, 15
- Prädikatenvariable, 11
- Quantor
 - All-, 12
 - eingeschränkter, 24
 - Existenz-, 12
- Reflexivität
 - der Identität, 23
- Regeln
 - predikatenlogische, 16
- Subjektvariable, 11
 - freie, 12
 - gebundene, 12
- Sätze
 - der Aussagenlogik, 19
 - der Prädikaten, 20
- Term, 11, 12
- Variable
 - Aussagen-, 12
 - Funktions-, 11
 - Prädikaten-, 11
 - Subjekt-, 11
- Verschiedenheit, 23
- wahr, 19
- Zusammenfassung, 5